

# Matematika

## Bevezető

A középfokú képzés során a matematika tanulása-tanítása tekintetében az egyik legfontosabb feladat a tanuló önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának kialakítása, fejlesztése. A 9. évfolyamtól kezdve a spirális felépítésnek megfelelően – a korábbi képzési szakaszok során megszerzett készségekre, képességekre és ismeretekre alapozva – egyre absztraktabb formában épül fel a matematika belső struktúrája (fogalmak definíciója, tételek, bizonyítások).

Az 1–4. és 5–8. évfolyamos képzés nevelési-oktatási szakaszait jellemző tanuláshoz és tanításhoz képest a 9–12. évfolyamokon fokozatosan hangsúlyosabbá válik a matematika deduktív jellege. Az új fogalmakat, algoritmusokat, ismereteket viszont továbbra is induktív módon, szemléltetéssel, felfedeztetéssel, tanulói tevékenységekre építve, a valósághoz kapcsolva kell bevezetni.

Jól megválasztott problémák tárgyalása során válik a tanulók számára is szükségessé az új fogalmak bevezetése és pontos definiálása. Tanári irányítással a tételek, általános összefüggések is felfedeztetők a tanulókkal. Ezen folyamat során fejlődik a tanulók szintetizáló és modellalkotó képessége. A felfedezett tételek és összefüggések egy része bizonyítás nélkül is gyarapítja a matematikai eszköztárat. Néhány tétel bizonyítása azonban elengedhetetlen része a matematika tanításának, hiszen a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése. Az új fogalmak megalkotása, az összefüggések, stratégiák felfedezése és az ismereteknek feladatok, problémák megoldása során történő tudatos alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a meglévő ismeretek mobilizálásának képességét, valamint a problémamegoldó gondolkodás eltérő típusainak adekvát használatát. Ennek a folyamatnak az eredményeképpen a tanuló meg tudja állapítani adott állítás, tétel érvényességi és alkalmazási körét, megállapításai, állításai mellett logikusan tud érvelni. A matematika tanulásának-tanításának egyik fő célja, hogy fejlődjön a tanuló mérlegelő gondolkodása, az adatok elemzését, szintézisét és értékelését lehetővé tevő készségek és képességek rendszere. A matematikai játékok, logikai feladványok fejlesztik a stratégiaalkotást, az algoritmikus gondolkodást, a kreativitást és a gondolkodás rugalmasságát.

Ebben a nevelési-oktatási szakaszban az ismert számok köre az irracionális számokkal bővül, valamint új műveletek bevezetésére és már ismert műveletek alkalmazásának bővítésére kerül sor a permanenciaelv alapján. Ezen folyamat során a tanuló egyre inkább képes lesz rá, hogy változatos matematikai objektumokat jelölő szimbólumokkal végezzen műveleteket.

A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technika és a humán tanulási területek ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák, a természeti és a gazdasági folyamatok értelmezéséhez és kezeléséhez. Ehhez – több más fogalom mellett – szükséges a függvény fogalmának változatos (nemcsak számhalmazokon értelmezett) példák mentén történő kiterjesztése.

A tanuló a matematika szaknyelvét érti és tudatosan használja. Életkorának megfelelő matematikai, matematikatörténeti szöveget képes önállóan olvasni, értelmezni. Mind írásban, mind szóban képes gondolatait a matematika szaknyelvének szabatos alkalmazásával közölni. A tanuló különböző forrásokat (tankönyv, függvénytáblázat, saját jegyzet, digitális források) használhat az órákon és a számonkérések alkalmával, bizonyos tételek, azonosságok, képletek felidézésére.

A tanuló társaival közösen tervez és hajt végre kooperatív tevékenységeket, projekteket. A közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét.

Ebben az életkorban is érvényesülnie kell a tanuló érdeklődésének, adottságának, absztrakciós szintjének megfelelő differenciálásnak. Ez a differenciálás jelentheti a Nat-ban leírt tananyagtartalmaknak a lehetőségekhez igazított bővítését is.

A tanuló digitális eszközöket, a tanulást, a szemléltetést, a tapasztalatszerzést és a felfedezést segítő szoftvereket, digitális információforrásokat használ, a matematika alkalmazását segítő számítógépes programokat ismer meg. Aktív résztvevője a tanulási-tanítási folyamatnak, ami lehetővé teszi azon kompetenciáinak és tervezési stratégiáinak a fejlődését, amelyek segítik a mai gyorsan változó világban való eligazodást és a különböző élethelyzetekben előforduló problémák megoldását.

A matematika tantárgy a Nemzeti alaptantervben rögzített kulcskompetenciákat az alábbi módon fejleszti:

**A tanulás kompetenciái:** A matematika tanulása során elengedhetetlen a tananyag alapos és átfogó megértése. A szöveges feladatok megoldása fejleszti az értő olvasás és a releváns információk kiválasztásának készségét. Az általánosítás és az analógiák adekvát használata, több szempont egyidejű figyelembevétele, a rendszerezési képesség, a megszerzett tudás új helyzetekben való alkalmazása elősegítik az aktív, önirányított tanulás kompetenciáinak kialakítását, fenntartását, megerősítését. A matematika tantárgy a matematikai logika és az algoritmikus gondolkodás fejlesztésével, az ok-okozati összefüggések megláttatásával hozzájárul a többi tantárgy tanulásához szükséges rendszerező, összefüggéseket felismerő, ezáltal hatékony önálló tanulási módszerek elsajátításához és megfelelő alkalmazásához is.

**A kommunikációs kompetenciák:** A matematika fejleszti a tanuló azon képességét, hogy világosan, röviden és pontosan fejezze ki gondolatait. A matematika tanulása során fokozatosan alakul ki a tanuló érvelési és vitakészsége. A szöveges problémák megoldása javítja a szöveg megértésének készségét: a tanulónak meg kell keresnie az információkat és fel kell ismernie egy adott információ jelentőségét a probléma megoldása során. A matematika tanulási folyamatában kialakul a különböző módon (szöveg, grafikon, táblázat, diagram és képlet) bemutatott tartalmak megértésének és alkotásának készségrendszere.

**A digitális kompetenciák:** A matematika tanulása során hangsúlyos szerepet kap a problémamegoldás és az algoritmikus gondolkodás, melyek elősegítik a tanuló digitális kompetenciáinak fejlesztését. A különböző matematikai tárgyú szoftverek, alkalmazások, applikációk és játékok alkalmazásán keresztül a matematika tanulása hozzájárul a tanuló digitális kultúrájának kialakításához.

**A matematikai, gondolkodási kompetenciák:** A matematika tanulása során a tanuló gondolkodásának fejlesztése elsősorban konkrét problémák megoldásán keresztül történik. A tanuló előzetes tudása és tapasztalata alapján azonosítja a problémákat, majd ismert matematikai fogalmakra támaszkodva stratégiát dolgoz ki ezek megoldására. Elfogadja, hogy a megoldás több különböző úton is elképzelhető, illetve találkozhat olyan nyitott problémákkal is, amelyeknek több megoldása is lehetséges. Kellő kitartással próbál ki különböző matematikai módszereket, és felismeri azokat a problémákat is, amelyeknek nincs megoldása.

A tanuló mérlegelő gondolkodásának fejlesztése többek között a feladatok megoldása során kapott eredmények elemzésén és értékelésén keresztül történik. A tanuló megtanul induktív úton példákat általánosítani és deduktív érvelést használni a matematikai állítások bizonyítására.

**A személyes és társas kapcsolati kompetenciák:** A matematika tanulása fejleszti a kitartás, a pontosság, a figyelem és a fegyelmezettség képességét. A matematika tanulásán keresztül erősödik a

tanuló felelősségtudata, gazdagodik az önképe, fejlődik a kooperációs készsége. A tanuló matematikai ismereteit alkalmazni tudja az egyéni célok eléréséhez szükséges tervezésben, az életét befolyásoló döntései megalapozásában és meghozatalában, a várható következmények mérlegelésében. A matematika tanulása elősegíti annak belátását, hogy a személyes erősségekre építeni, a hibákból pedig tanulni lehet.

A tanuló a matematikai foglalkozások során megtanulja, hogyan oszthatja meg ötleteit másokkal, és hogyan segítheti társait a matematikai fogalmak megértése vagy azok alkalmazása során. Felelősséget vállal a közösen kitűzött feladatok elvégzéséért, s megtanulja tisztelni mások álláspontját, gondolkodásmódját.

**A kreativitás, a kreatív alkotás, önkifejezés és kulturális tudatosság kompetenciái:** A matematika olyan tudomány, amely összeköti a különböző kultúrákat. A tanuló megismeri a gondolkodás logikai felépítésének eleganciáját, a matematikának a természethez, a művészetekhez és az épített környezethez fűződő viszonyát.

A tanuló konkrét vagy képi reprezentációval vagy szimbolikus modellekkel végzi a matematikai gondolatok vagy kapcsolatok feltárását, majd új kapcsolatokat alakít ki a matematikai fogalmak között.

**Munkavállalói, innovációs és vállalkozói kompetenciák:** A kompetencia fejlesztése valódi adatok felhasználásával összeállított mindennapi problémák megoldásán keresztül történik. Ennek során a különböző megoldási lehetőségek keresése fejleszti a gondolkodás rugalmasságát és az új ötletek megalkotásának képességét. A tanuló megfelelő játékokon keresztül képessé válik a különböző kockázatok felmérésére, a számára kedvezőnek tűnő stratégia kidolgozására, és megtapasztalja döntései következményét. A matematikai projekteken való részvétel segíti a későbbi munkavállalás szempontjából fontos készségek kialakulását (kreativitás, problémamegoldás, kezdeményezőkézség, másokkal való együttműködés készsége).

## A tanulók értékelése

A javasolt ellenőrzési módszerek:

- **feladatlapok;**
- **szóbeli felelet** (órán megoldott mintára feladatok számonkérése, házi feladatok helyes megoldásának szakszerű kommunikálása, lényegkiemelés, érvelés, kiselőadás felkészülés alapján, definíciók, tételek pontos kimondása, bizonyítások levezetése, órai feladatok stb.);
- **témazáró dolgozat**
- **otthoni munka** (feladatok megoldása, gyűjtőmunka, megfigyelés, feladatok számítógépes megoldása stb.);
- **csoportmunka** (statisztikai adatgyűjtés, valószínűségi kísérletek elvégzése stb.);
- **projektmunka** és annak dokumentálása;
- **versenyeken, vetélkedőkön való szereplés**, elért eredmények.
- A tantárgyi eredmények értékelése a hagyományos 5 fokozatú skálán történik. Fontos, hogy a tanulók
- **motiváltak legyenek** a minél jobb értékelés elnyerésére;
- tudják, hogy munkájukat hogyan fogják (szóban, írásban, osztályzattal) értékelni, – ez a tanár részéről **következetességet és céltudatosságot** igényel;
- számítsanak arra, hogy munkájuk elvégzése után **önértékelést** is kell végezniük; • hallgassák meg társaik értékelését az adott szempontok alapján;

- fogadják meg **tanáraik** észrevételeit, **javaslatait**, kritikáit akkor is, ha nem érdemjeggyel történik az értékelés, tudják hasznosítani a fejlesztő értékelési megnyilvánulásokat.

#### **Az osztályzat megállapításának szempontja:**

A tanulók elbírálása a teljesítmény alapján történik. Alapja a tankönyvben és a füzetben szereplő ismeretanyag. Meghatározó a témazáró osztályzat.

**Jeles:** az a tanuló, aki a definíciókat érti, és jól tudja alkalmazni. A tételeket (emelt szinten a bizonyításukat is) ismeri. Nehezebb feladatokat önállóan képes pontosan megoldani. Tudja alkalmazni az elméletet gyakorlati problémák megoldása során.

**Jó** az a tanuló, aki a definíciókat jól alkalmazza, a tételeket ismeri. Nehéz feladatokat is képes kisebb segítséggel átlátni, megérteni és megoldani. Az elmélet gyakorlati alkalmazása problémát jelenthet.

**Közepes** az a tanuló, aki a definíciókat érti és jól alkalmazza. A tanult tételeket ismeri, de bizonytalanul alkalmazza. Könnyebb feladatokat önállóan képes megoldani, nehezebbeket csak segítséggel.

**Elégséges** az a tanuló, aki a definíciókat ismeri és tudja alkalmazni egyszerű feladatokban. A tanult tételeket csak segítséggel tudja kimondani és a könnyebb feladatok megoldása is gondot jelenthet.

#### **Az írásbeli dolgozatokra javasolt érdemjegyeket az alábbiak szerint határoztuk meg:**

jeles	85% fölött
jó	70% - 85%
közepes	55% - 70%
elégséges	40% - 55%
elégtelen	40% alatt

## **A tankönyvek kiválasztásának elvei**

A matematika tantárgy tanításához a tanulók életkori sajátosságait figyelembe vevő, a szaknyelv használatát az adott életkornak megfelelően alkalmazó taneszközök, tankönyvek közül lehetőleg olyanokat kell használni, amelyek lehetőséget biztosítanak a sokoldalú képességfejlesztésre, tartalmukban korszerűek és tananyagstruktúrában a tanulói ismeretszerzés sajátosságaihoz illeszkednek, ezért a tananyag eredményesebb elsajátítását teszik lehetővé.

A taneszköz kiválasztásánál érdemes előnyben részesíteni az alábbi jellemzőket, ha azok értelmezhetők az adott taneszközhöz:

- tantervi megfelelés
- feladatokban gazdag,
- az egyéni haladást jól szolgáló, differenciált tanulást-tanítást támogató,
- az önálló tanulásra ösztönző, azt lehetővé tevő, tehát a tanulásirányítást jól megvalósító,
- legyen motiváló hatású, például matematikatörténeti kitekintés, utalás más tantárgyak tartalmára,
- a tanultakat rendszerező és jól strukturált,

- tipográfiaiailag jól szerkesztett (pl. ábrák, kiemelések), didaktikailag jól felépített tankönyveket, esztétikus legyen
- segédanyagok (tanári kézikönyv, feladatlapok, stb) megléte
- tankönyvcsalád
- előzetes kipróbálás pozitív tapasztalatai
- gyermeklélektani szempontok
- ár

## Tantárgyi struktúra és óraszámok

Matematika		9. évf.	10. évf.	11. évf.	12. évf
AJTP	4	3	3	3	4
A		4	3	3	4
B		5	4	3	4
C		4	3	3	4
D biológia-kémia		4	3	3	4
D informatika		4	4	3	4
emelt érettségire				3	3

## Kerettantervi megfelelés

2020-as NAT –hoz illeszkedő kerettanterv alapján készült helyi tanterv.

A kerettanterv\* által meghatározott 20 %-os szabad mozgásteret kiegészítő tananyagok és a megtanított ismeretek elmélyítésére oktatására használjuk fel. *Az egyes témakörökben dőlt betűvel jelöltük ezeket a plusz tananyagtartalmakat.*

\* [https://www.oktatas.hu/koznevelés/kerettantervek/2020\\_nat/kerettanterv\\_gimn\\_9\\_12\\_evf\\_A](https://www.oktatas.hu/koznevelés/kerettantervek/2020_nat/kerettanterv_gimn_9_12_evf_A)  
 Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról

## Matematika 9–10. évfolyam

A 9–10. évfolyamon a korábbi képzési szakaszok során megszerzett ismeretekre és kialakított készségekre, képességekre alapozva – a spirális tananyagfelépítést szem előtt tartva – az egyes témakörök új ismeretei matematikai szempontból egyre pontosabb és elvontabb formában jelennek meg a tanulási-tanítási folyamat során. Egyre határozottabb a fogalmak pontos definiálásának, az állítások, tételek indoklásának, bizonyításának, valamint az általánosításnak az igénye. Erre a szakaszra fokozottan jellemző a korábbi és az új ismeretek egységes rendszerbe foglalása, az egyes témakörökön belüli rendszerezés.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló – a lehetőségekhez mérten – a tanár által irányított módon, feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok fejlesztik a matematikai kommunikációt. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést és a felfedeztetést.

A 9–10. évfolyamon megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Ebben a szakaszban jelennek meg először a valós számok; elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek; másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek; a függvény fogalma, függvénytulajdonságok; a kör és részei. Vannak olyan témakörök, amelyek megjelennek más területek tanítása során is, ezért a tananyag egyes részeihez javasolt óraszámok nem feltétlenül jelentenek időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése lehetővé teszi a hétköznapi vagy matematikai nyelven megfogalmazott problémák és a megoldás során alkalmazott matematikai modellek körének bővülését.

**A 9. évfolyamon a matematika tantárgy alapóraszámja a különböző csoportokban változó, B osztályban 180, az AJTP-ben 108, a többi osztályban 144. az éves óraszám.**

**A témakörök áttekintő táblázata:**

Témakör neve	Helyi tantervi óraszám		
	AJTP		B
Halmazok	5	10	10
Matematikai logika	0	0	0
Kombinatorika, gráfok	6	8	12
Számhalmazok, műveletek	4	6	6
Hatvány, gyök	8	10	12
Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során	15	15	18
Arányosság, százalékszámítás	3	6	8
Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek	16	18	22
Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek	0	0	0
A függvény fogalma, függvénytulajdonságok	8	12	15
Geometriai alapismeretek	2	6	6

Háromszögek	11	16	20
Négyszögek, sokszögek	7	10	12
A kör és részei	6	6	10
Transzformációk, szerkesztések	10	14	20
Leíró statisztika	0	0	0
Valószínűség-számítás	0	0	0
Számonkérés, ismétlés	7	7	9
<b>Összes óraszám:</b>	108	144	180

**TÉMAKÖR: Halmazok****ÓRASZÁM: 5/ 10/ 10 óra****TANULÁSI EREDMÉNYEK****A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- adott halmazt diszjunkt részhalmazaira bont, osztályoz;
- halmazokat különböző módokon megad;
- halmazokkal műveleteket végez, azokat ábrázolja és értelmezi;
- alkalmazza a logikai szita elvét
- véges halmazok elemszámát meghatározza

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Halmaz közös elem nélküli részhalmazokra bontása, példák ennek alkalmazására a matematikán belül, más tantárgyaknál és a mindennapi életben
- Halmaz megadása utasítással, elemek felsorolásával
- Halmazok közötti viszonyok ábrázolása, értelmezése
- Halmazok metszetének, uniójának, különbségének, komplementerének képzése, ábrázolása és értelmezése
- Két-három halmaz elemszámával kapcsolatos feladatok megoldása logikai szita segítségével
- $n$  elemű halmaz részhalmazainak száma
- Szemléletes kép végtelen halmazokról, véges és végtelen halmazok, megszámlálható, nem megszámlálható halmazok

**FOGALMAK**

alaphalmaz, részhalmaz, üres halmaz, halmazok egyenlősége, Venn-diagram; halmazműveletek: unió, metszet, különbség, komplementer halmaz; diszjunkt halmazok, halmaz elemszáma, logikai szita

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Hétköznapi életből, más tantárgyakból vagy a matematikából vett, konkrétan vagy digitálisan megjelenített alaphalmazból megadott tulajdonságokkal rendelkező elemek válogatása
- Konkrét részhalmaz esetén a részhalmaz képzési szempontjainak megállapítása
- A történelem, a művészetek, a tudományok, a sport neves személyiségeinek kitalálása különböző tulajdonságok alapján

- Barkochba játék
- A „végtelen szálloda” mint modell
- Megszámálhatóan végtelen számosságú halmazok elemei között egyértelmű hozzárendelés felfedeztetése, például a pozitív természetes számok halmazának számossága megegyezik a pozitív páros számok halmazának számosságával

## **TÉMAKÖR: Számhalmazok, műveletek**

**ÓRASZÁM: 4/ 6/ 6 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- a kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás műveleti azonosságokat helyesen alkalmazza különböző számolási helyzetekben;
- racionális számokat tizedes tört és közös nevezőes tört alakban is felír;
- ismeri a valós számok és a számegyenes kapcsolatát;
- ismeri és alkalmazza az intervallum, abszolút
- érték, az ellentett és a reciprokok fogalmát;
- a számolással kapott eredményeket nagyságrendileg megbecsüli, és így ellenőrzi az eredményt;
- valós számok közelítő alakjaival számol, és megfelelően kerekít.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Számhalmazok felépülése
- Műveleti azonosságok (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás), zárójelek helyes használata
- Tizedes törtek átírása közös nevezőes tört alakba és viszont
- Véges, végtelen szakaszos, végtelen nem szakaszos tizedes törtek
- Irracionális számok szemléltetése
- Valós számok elhelyezkedése számegyenesen
- Nyílt és zárt intervallumok fogalmának ismerete és alkalmazása
- Számok abszolútértékének, ellentettjének és reciprokjának meghatározása
- Számológéppel elvégzett számítások eredményének előzetes becslése és nagyságrendi ellenőrzése
- Valós számok adott jegyre kerekítése
- Valós számok gyakorlati helyzetekben történő észszerű kerekítése

### **FOGALMAK**

racionális szám, irracionális szám, valós szám, normálalak, kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás, nyílt intervallum, zárt intervallum, abszolútérték, ellentett, reciprok

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- A számológép helyes használatának elsajátítása, például műveleti sorrend, zárójelek



- Írásban elvégzett műveletek ellenőrzése számológéppel
- Célszám megközelítése adott számjegyekkel, műveleti jelek és zárójelek használatával
- Becslés, nagyságrendek ellenőrzése
- Tanulói kiselőadás a helyi értékes számírás kialakulásáról, a számjegyek kialakulásának történetéről
- A tanteremben vagy a tanterem környezetében végzett mérések esetén a megfelelő kerekítés alkalmazása
- Adott mérés elvégzése esetén a mérési hiba következményeinek vizsgálata
- egyszerű szöveges összefüggések leírása matematikai jelekkel

## **TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok**

**ÓRASZÁM: 6/ 8/ 12 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- esetszétválasztás és szorzási elv alkalmazása feladatok megoldásában;
- összeszámlálási modellek alkalmazása feladatok megoldásában;
- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével;
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Hétköznapi helyzetekhez kapcsolódó sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezéssel
- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása matematikai problémákban
- Esetszétválasztás és szorzási elv alkalmazása feladatok megoldásában
- Összeszámlálási modellek alkalmazása feladatok megoldásában
- $n!$ ,  $n^k$  típusú feladatok
- Gráfok alkalmazása konkrét hétköznapi és matematikai szituációk szemléltetésére, feladatok megoldására
- Gondolatmenet megjelenítése gráffal

### **FOGALMAK**

szorzási szabály, összeadási szabály, faktoriális, gráf, gráf csúcsa, gráf éle

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezett leszámplálással és a szorzási és/vagy esetszétválasztási elv alkalmazásával
- Geometriai eszközök használata kombinatorikai problémák megoldására
- Azonos modellen alapuló, de különböző megfogalmazású feladatok megoldása

- Szorzat vagy összeg alakban megadott eredményű kombinatorikafeladatokhoz saját szöveg írása
- Téves megoldású kombinatorikafeladatokban a hiba megtalálása és a tévedés kijavítása
- Sorba rendezési feladatok megoldásának szemléltetése gráffal
- Adott gráfhoz hozzáillő feladatszöveg alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában

## **TÉMAKÖR: Hatvány, gyök**

**ÓRASZÁM: 8/ 10/ 12 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- megérti a számkörbővítés elveit;
- ismeri és alkalmazza az egész kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza az egész kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- ismeri és alkalmazza a normálalak fogalmát.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Valós számok hatványozása pozitív egész kitevőre
- Hatványozás 0 és negatív egész kitevőre
- A hatványozás azonosságainak megfigyelése, felfedezése
- A hatványozás azonosságainak bizonyítása konkrét alapszám és tetszőleges pozitív egész kitevő esetén
- Számok normálalakja
- Számolás normálalak segítségével
- Normálalak a számológépen

### **FOGALMAK**

hatványalap, hatványkitevő, normálalak

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Projektmunka: hányszor lehet félbehajtani egy nagyméretű papírt? Keresés az interneten, kísérlet végzése például egy teljes guriga vécépapírral
- 2, 3, 5 hatványainak felismerése
- Internetes forrásból származó, nagyon kicsi vagy nagyon nagy számokat tartalmazó cikkek valóságtartalmának megállapítása páros vagy csoportmunkában
- A természettudományokban és a társadalomban előforduló nagy és kis mennyiségekkel történő számolás

## **TÉMAKÖR: Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során**

**ÓRASZÁM: 15/ 15 /18 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- műveleteket végez algebrai kifejezésekkel;
- ismer és alkalmaz egyszerű algebrai azonosságokat;

- átalakít algebrai kifejezéseket összevonás, szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok alkalmazásával.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Egész kifejezések, polinomok, törtkifejezések. A kifejezés értelmezési tartománya, helyettesítési érték
- Műveletek egyszerű algebrai kifejezésekkel: összeadás, kivonás, szorzás, osztás, egytagú kifejezések hatványa, műveleti tulajdonságok
- Többtagú kifejezés szorzása többtagú kifejezésekkel – zárójelfelbontás, előjelszabályok
- Többtagú kifejezés szorzattá alakítása kiemeléssel, nevezetes azonosságok alkalmazásával
- Műveleti azonosságok ismerete és alkalmazása egyenletek megoldása során
- Az  $(a + b)^2$ , az  $(a - b)^2$  és az  $(a + b)(a - b)$  nevezetes azonosságok ismerete és alkalmazása (például oszthatósági feladatokban, egyenletek megoldásában, függvények ábrázolásában)
- Egyszerű másodfokú polinom átalakítása teljes négyzetté kiegészítéssel
- *Oszthatóság, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, prímszám, összetett szám, relatív prímek fogalma*
- Polinomok összeadása, kivonása, szorzása, hatványozása. Kiemelés, szorzattá alakítás. Kifejezések legnagyobb közös osztója, legkisebb közös többszöröse.
- Algebrai törtek összeadása, kivonása, szorzása, osztása. Egyszerűsítés. Bővítés.
- A tanult azonosságok, tulajdonságok felhasználása algebrai átalakítások, egyszerűsítések során.

### FOGALMAK

összeg, tag, szorzat, tényező, egynemű kifejezés, együttható, teljes négyzet, polinom, algebrai tört, azonosság

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- „Gondolj egy számra, és én kitalálom” játék, matematikai bűvésztükkök algebrai magyarázata
- Algebrai kifejezésekkel végzett műveletek geometriai modellezése
- A nevezetes azonosságok geometriai megjelenítése
- Számolási „trükkök” a nevezetes azonosságok segítségével, például kétjegyű számok négyzetének,  $99 \cdot 101$  típusú szorzat eredményének kiszámolása fejben

### TÉMAKÖR: Arányosság, százalékszámítás

ÓRASZÁM: 3/ 6/ 8 óra

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza az egyenes és a fordított arányosságot;
- ismeri a százalék alap, -érték, -láb, -pont fogalmát

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Az egyenes és a fordított arányosság fogalmának ismerete és alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során
- Az egyenes és a fordított arányosság grafikonjának felismerése és elkészítése
- Példák az egyenes és a fordított arányosságtól különböző arányosságokra (négyzetes, gyökös)
- Példák egy irányban vagy ellentétes irányban változó mennyiségpárokra a mindennapi életből
- Százalékszámítással kapcsolatos hétköznapi helyzetekhez (például háztartási bevételekhez, kiadásokhoz, pénzügyi fogalmakhoz, gazdasági folyamatokhoz) és más tantárgyakhoz köthető feladatok megoldása

### FOGALMAK

egyenes arányosság, fordított arányosság, százalékalap, százaléérték, százalékláb

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Összetett, valódi élethelyzetekkel kapcsolatos feladatok megoldása csoportmunkában, szükség esetén grafikon segítségével
- Háztartási számlák elemzése az azokon megjelenő egységárak és fizetendő összegek figyelembevételével
- Törtrészek és százalék közötti kapcsolat

## **TÉMAKÖR: Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek**

**ÓRASZÁM: 16/ 18/ 22 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékészlet-vizsgálattal ellenőrzi.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza a következő egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, szorzattá alakítás;
- megold elsőfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket, elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszereket.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Elsőfokú egyenletre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása

- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti problémába visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve
- Alaphalmaz, megoldáshalmaz fogalmának ismerete
- Egyismeretlenes elsőfokú egyenlet és egyenlőtlenség megoldása mérlegelvel és grafikusán, algebrai azonosságok alkalmazása
- *Törtés egyenletek, egyenlőtlenségek. Értelmezési tartomány. Ekvivalens átalakítások. Az ellenőrzés szerepe, törtek előjele*
- *Abszolútértéket tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek*
- Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása behelyettesítéssel, közös együtthatók módszerével, grafikusán
- Elsőfokú egyenlettel, egyenlőtlenséggel, egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok megoldása (például út-idő-sebesség, közös munkavégzés, keveréses feladatok, pénzügyi és gazdasági tematikájú feladatok), kapott eredmény értelmezése

### FOGALMAK

alaphalmaz, megoldáshalmaz, mérlegelv, ellentmondás, azonosság, értelmezési tartomány, ekvivalens átalakítás, hamis gyök

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Szöveges feladatok megoldása több különböző úton, a különböző megoldások összehasonlítása előnyök és hátrányok szempontjából
- Hiányos, túlhatározott, illetve ellentmondó adatokat tartalmazó problémák vizsgálata
- Nyílt végű problémák megoldása
- Adott egyenlethez szöveges feladat alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában
- Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek grafikus megoldása során; a digitális eszközzel történő ábrázolás előnyeinek és hátrányainak megbeszélése
- Út-idő-sebesség, közös munkavégzés, keveréses feladatok, pénzügyi és gazdasági tematikájú feladatok

## TÉMAKÖR: A függvény fogalma, függvénytulajdonságok

ÓRASZÁM: 8/ 12/ 15 óra

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- megad hétköznapi életben előforduló hozzárendeléseket;
- adott képlet alapján helyettesítési értékeket számol, és azokat táblázatba rendezi;
- táblázattal megadott függvény összetartozó értékeit ábrázolja koordináta-rendszerben;
- a grafikonról megállapítja függvények alapvető tulajdonságait.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hétköznapi hozzárendések megfigyelése, tulajdonságainak megfogalmazása: egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű
- Függvény megadása, alapvető függvénytani fogalmak ismerete
- Függvényértékek meghatározása és táblázatba rendezése
- Függvények ábrázolása táblázat alapján
- Függvények alkalmazása valós, hétköznapi helyzetek jellemzésére, gyakorlati problémák megoldására
- A grafikon alapján a függvény értelmezési tartományának, értékészletének, minimumának, maximumának és zérushelyének megállapítása, a növekedés és fogyás leolvasása
- Lineáris függvény, *másodfokú függvény*, *négyzetgyökfüggvény*, *abszolútérték-függvény* fordított arányosságot leíró függvény (elemi függvények) grafikonja, tulajdonságai
- Elemi függvényekkel egyszerű függvénytranszformációs lépések végrehajtása:  $f(x) + c$ ,  $f(x + c)$ ,  $c \cdot f(x)$ ,  $|f(x)|$
- Lineáris függvények hozzárendelési utasításának leolvasása grafikon alapján
- Helyettesítési érték számolása, egyszerű függvények esetén az  $f(x) = c$  alapján  $x$  meghatározása és ennek alkalmazása gyakorlati problémák megoldása során
- Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés megfordítása és a megfordított hozzárendelés ábrázolása

### FOGALMAK

egyértelmű hozzárendelés, kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, értelmezési tartomány, képhalmaz, értékészlet, helyettesítési érték, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Összetett, valódi helyzetekkel, például demográfiai kérdésekkel, pénzügyi feladatokkal kapcsolatos grafikonok elemzése csoportmunkában
- Hétköznapi helyzetekben időben változó folyamatokkal kapcsolatos mérések végzése és a mért adatok ábrázolása koordináta-rendszerben (például hőmérséklet)
- A tanulók mindennapi életéhez kapcsolódó grafikonok ábrázolása és elemzése (például út-idő grafikon az iskolába való eljutásról)
- Függvények ábrázolása digitális eszköz segítségével
- Barkochba játék a függvényekkel kapcsolatos fogalmak használatával
- Szöveges feladatok megoldása grafikus úton
- Algebrai úton nem vagy nehezen megoldható egyenletek közelítő megoldása grafikus úton digitális eszköz segítségével

## TÉMAKÖR: Geometriai alapismeretek

ÓRASZÁM: 2/ 6/ 6 óra

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és használja a pont, egyenes, sík (térelemek) és szög fogalmát és kölcsönös helyzetüket;
- ismeri és alkalmazza a nevezetes szögpárok tulajdonságait;
- ismeri az alapszerkesztéseket, és ezeket végre tudja hajtani hagyományos vagy digitális eszközzel.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Két pont, pont és egyenes, két egyenes távolsága, hajlásszöge
- Pont, egyenes, sík kölcsönös helyzetének ismerete és alkalmazása
- Szögfajták, szögek szerkesztése, szögmásolás
- Nevezetes szögpárok tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: pótszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúcsszögek, egyállású szögek, váltószögek
- A szakaszfelező merőleges és a szögfelező mint ponthalmazok tulajdonságainak ismerete
- Dinamikus geometriai szoftver alkalmazásának előkészítése, használata
- Alapszerkesztések végrehajtása hagyományos vagy digitális eszközzel euklideszi módon: szakaszfelező merőleges, szögfelező, merőleges és párhuzamos egyenesek szerkesztése, szög másolása

#### FOGALMAK

pont, egyenes, sík, szögtartomány, hajlásszög, párhuzamos, merőleges, pótszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek, csúcsszögek, egyállású szögek, váltószögek, szakaszfelező merőleges, szögfelező

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Az osztályteremben vagy a terem környezetében „egyenesek” kölcsönös helyzetének megadása, ezek távolságának megmérése
- Számszerű adatként csak a méretarányt tartalmazó térkép alapján valódi távolságok meghatározása, becslése
- Számszerű adatként csak méretarányt tartalmazó térképen adott helységektől (közelítőleg) egyenlő távolságra levő helységek megkeresése
- Alapszerkesztések végrehajtása hagyományos vagy digitális eszközökkel

### TÉMAKÖR: Háromszögek

**ÓRASZÁM: 11/ 16/20 óra**

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, úrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- kiszámítja háromszögek területét.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza a háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei közötti kapcsolatokat; a speciális háromszögek tulajdonságait;
- ismeri és alkalmazza a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmakat és tételeket;

- ismeri és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A háromszögek csoportosítása oldalak és szögek szerint
- Az alapvető összefüggések ismerete és alkalmazása háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között
- A háromszögek szögeiről, oldalairól tanult tételek bizonyítása, alkalmazása számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatokban
- Speciális háromszögek tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: szabályos, egyenlő szárú, derékszögű háromszög
- A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmak, tételek ismerete és alkalmazása: oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt, illetve beírt kör
- Az oldalfelező merőlegesek és a belső szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tétel bizonyítása
- A Pitagorasz-tétel és megfordításának ismerete és alkalmazása
- A Pitagorasz-tétel bizonyítása
- Számítási feladatok síkban és térben
- Háromszögek területe

### FOGALMAK

szabályos háromszög, egyenlő szárú háromszög, derékszögű háromszög, oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt kör, beírt kör

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó tételek felfedeztetése szerkesztéssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával, páros vagy csoportmunkában
- Konkrét alakzatok átdarabolása más alakzattá páros vagy csoportmunkában
- A derékszögű háromszög oldalaira szerkesztett négyzetek átdarabolása a Pitagorasz-tételnek megfelelő módon, pitagorasz-tangramok vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával

### TÉMAKÖR: **Négyszögek, sokszögek**

**ÓRASZÁM: 7/ 10/ 12 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, úrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza a négyszögekre és szabályos sokszögre vonatkozó ismereteket; kiszámítja a konvex sokszög belső és külső szögeinek összegét;



**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Speciális négyszögek (trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet) tulajdonságainak ismerete, terület
- Konvex sokszögeknél az átlók számára, a belső és külső szögösszegre vonatkozó tételek ismerete, bizonyítása és alkalmazása
- Szabályos sokszög fogalmának ismerete

**FOGALMAK**

trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet, konvex sokszög, szabályos sokszög

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Különböző típusú speciális négyszögek területének meghatározására vonatkozó formula felfedeztetése átdarabolással
- A belső és a külső szögösszegre vonatkozó tételek felfedeztetése, illusztrálása átdarabolással, hajtogatással vagy dinamikus geometriai szoftver segítségével
- Projektmunka: lakás/iskola alaprajzának elkészítése méretarányosan

**TÉMAKÖR: A kör és részei**

**ÓRASZÁM: 6/ 6 / 10 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, úrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri a kör érintőjének fogalmát, kapcsolatát az érintési pontba húzott sugárral;
- ismeri és alkalmazza a Thalész-tételt és megfordítását.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, és hogy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak
- A Thalész-tétel és megfordításának ismerete és alkalmazása
- A Thalész-tétel bizonyítása
- *Szerkesztési és bizonyítási feladatok, körérintő szerkesztése*

**FOGALMAK**

középponti szög, körív, körcikk, körgyűrű, körszelet, érintőszakaszok

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- A Thalész-tétel felfedeztetése szerkesztéssel, szögméréssel vagy dinamikus geometriai szoftver alkalmazásával

**TÉMAKÖR: Transzformációk, szerkesztések**

**ÓRASZÁM: 10/ 14/ 20 óra****TANULÁSI EREDMÉNYEK****A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismer példákat geometriai transzformációkra;
- ismeri és alkalmazza a síkbeli egybevágósági transzformációkat és tulajdonságaikat; alakzatok egybevágóságát;
- megszerkeszti egy alakzat tengelyes, illetve középpontos tükröképét, pont körüli elforgatottját, párhuzamos eltolját hagyományosan és digitális eszközzel;
- geometriai szerkesztési feladatoknál vizsgálja és megállapítja a szerkeszthetőség feltételeit.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Példák ismerete geometriai hozzárendelésekre (merőleges vetítés, párhuzamos vetítés, merőleges affinitás, térkép, fényképezés)
- A tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás ismerete, tulajdonságaik
- A vektor fogalmának kialakítása a párhuzamos eltolás segítségével
- Egybevágósági transzformációk egymás utáni végrehajtása
- Egybevágósági transzformációk végrehajtása szerkesztéssel vagy digitális eszközzel
- Egybevágó alakzatok, szimmetriák megfigyelése a környezetben, művészeti alkotásokban
- Az egybevágósági transzformációk alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában
- Háromszögek egybevágóságának alapesetei és ezek alkalmazása
- Négyszögek egybevágósága
- Szimmetrikus alakzatok, szimmetrián alapuló tulajdonságok felismerése: szögek, szakaszok egyenlősége
- Egyszerű szerkesztési feladatok megoldása hagyományos vagy digitális eszközzel; diskusszió
- Gyakorlati feladatok megoldása egybevágóságok segítségével (például a sík parkettázása különféle síkidomokkal; szabásminta készítése, használata)
- *A paralelogramma, a háromszög és a trapéz középvonala*

**FOGALMAK**

tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli forgatás, párhuzamos eltolás, egybevágóság, forgásszög, vektor, vektorok összege

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Gyakorlati példák keresése geometriai hozzárendelésekre, például fényképezés, filmvetítés
- A középpontos tükrözés, a pont körüli forgatás és a párhuzamos eltolás bemutatása mint két tengelyes tükrözés egymásutánja

- M. C. Escher és Victor Vasarely néhány interneten is elérhető alkotásának elemzése a szimmetriák szempontjából; hasonló módszerrel képek alkotása
- A sík parkettázása egybevágó háromszögekkel, négyszögekkel papírsablonok vagy dinamikus geometriai szoftver segítségével
- A tengelyes vagy középpontos szimmetriára alapozó stratégiai játékok (például pénzforgatós, színezős) páros munkában

**A 10. évfolyamon a matematika tantárgy alapóraszám 144/108 (heti 4/3) óra.**

**A témakörök áttekintő táblázata:**

Témakör neve	Helyi tantervi óraszám	
		B és Info
Halmazok	0	0
Matematikai logika	8	10
Kombinatorika, gráfok	12	12
Számhalmazok, műveletek	0	0
Hatvány, gyök	10	12
Betűs kifejezések alkalmazása egyenletmegoldás, függvényábrázolás során	0	0
Arányosság, százalékszámítás	0	0
Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek	0	0
Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek	16	24
A függvény fogalma, függvénytulajdonságok	6	8
Geometriai alapismeretek	0	0
Háromszögek	12	18
Négyszögek, sokszögek	4	5
A kör és részei	5	10
Transzformációk, szerkesztések	12	16
Leíró statisztika	9	10
Valószínűség-számítás	8	12
Számonkérés, ismétlés	6	7
<b>Összes óraszám:</b>	108	144

**TÉMAKÖR: Matematikai logika**

**ÓRASZÁM: 8/ 10 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
- tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- adott állításról eldönti, hogy igaz vagy hamis;

- alkalmazza a tagadás műveletét egyszerű feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az „és”, a (megengedő és kizáró) „vagy” logikai jelentését;
- megfogalmazza adott állítás megfordítását;
- helyesen használja a „minden” és „van olyan” kifejezéseket.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A matematikai bizonyítás fogalma, matematikai tartalmú szöveg értelmezése
- Tétel kimondása, bizonyítása. Állítás és megfordítása
- Állítás logikai értékének megállapítása (igaz vagy hamis)
- Állítás tagadásának alkalmazása egyszerű feladatokban
- A „nem”, az „és”, a megengedő „vagy” és a kizáró „vagy” logikai jelentésének ismerete és alkalmazása matematikai és matematikán kívüli feladatokban
- A „minden” és a „van olyan” típusú állítások logikai értékének megállapítása és ennek indoklása egyszerű esetekben, tagadása
- Adott állítás megfordításának megfogalmazása
- „Ha..., akkor...” és „akkor és csak akkor” típusú egyszerű állítások logikai értékének megállapítása és tagadása
- Stratégiai és logikai játékok

#### FOGALMAK

tétel, bizonyítás, igaz-hamis; „nem”, „és”, „vagy”, „vagy..., vagy...”, „ha..., akkor...”, „akkor és csak akkor”

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- „Bírósági tárgyalás”, ahol az osztály tanulói a védők és a vádlók egy állítás indoklására, cáfolására
- „Mit állít a szigetlakó?”, „Ki volt a tettes, ha...?” típusú feladatok eljátszása, megoldása csoportmunkában
- Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
- Stratégiai játékok, például egyszerű NIM játékok, táblás játékok
- Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

#### TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok

ÓRASZÁM: 12/ 12 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével;
- véges halmazok elemszámát meghatározza;
- alkalmazza a logikai szita elvét.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Hétköznapi helyzetekhez kapcsolódó sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezéssel
- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása matematikai problémákban
- Szorzási elv alkalmazása feladatok megoldásában
- *Komplementer-módszer*
- Összeszámlálási modellek alkalmazása feladatok megoldásában
- Gráfok alkalmazása konkrét hétköznapi és matematikai szituációk szemléltetésére, feladatok megoldására
- Gráf csúcsainak fokszámösszege és éleinek száma közötti összefüggés ismerete és alkalmazása gyakorlati feladatokban

### FOGALMAK

szorzási szabály, összeadási szabály, gráf, gráf csúcsa, gráf éle

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása rendszerezett leszámplálással és a szorzási és/vagy esetszétválasztási elv alkalmazásával
- Geometriai eszközök használata kombinatorikai problémák megoldására
- Azonos modellen alapuló, de különböző megfogalmazású feladatok megoldása
- Szorzat vagy összeg alakban megadott eredményű kombinatorikafeladatokhoz saját szöveg írása
- Téves megoldású kombinatorikafeladatokban a hiba megtalálása és a tévedés kijavítása
- Sorba rendezési feladatok megoldásának szemléltetése gráffal
- Adott gráfhoz hozzáillő feladatszöveg alkotása és „feladatküldés” csoportmunkában

### TÉMAKÖR: Hatvány, gyök

ÓRASZÁM: 10 /12 óra

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a négyzetgyök fogalmát és azonosságait

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza a négyzetgyök fogalmát és azonosságait;

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A négyzetgyök definíciója
- Nemnegatív számok négyzetgyökének megadása számológép segítségével
- A négyzetgyökvonás azonosságai
- Műveletek gyökös kifejezésekkel
- Bevitel gyökjel alá, kiemelés gyökjel alól, nevező gyöktelenítése

### FOGALMAK

négyzetgyök

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A pontos érték kiszámításának igénye, számológép célszerű alkalmazása a szükséges számításokban

**TÉMAKÖR: Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek****ÓRASZÁM: 16/ 24 óra****TANULÁSI EREDMÉNYEK****A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg választát;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- megold másodfokú egyismeretlenes egyenleteket és egyenlőtlenségeket; ismeri és alkalmazza a diszkriminánst, a megoldóképletet és a gyöktényezős alakot.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Másodfokú egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti problémába visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve
- Egyenletek megoldása ekvivalens átalakításokkal
- Másodfokú egyenlet megoldása szorzattá alakítással, teljes négyzetté kiegészítéssel, megoldóképlettel és grafikusán
- Megoldóképlet, diszkrimináns, gyöktényezős alak
- Egyszerű másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása
- Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok
- Másodfokú egyenlőtlenség megoldása grafikusán
- Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok megoldása
- $\sqrt{x+c} = ax+b$
- Értelmezési tartomány, ellenőrzés szerepe, szükségessége
- *Két szám számtani és mértani közepe, a köztük levő egyenlőtlenség*

**FOGALMAK**

másodfokú egyenlet megoldóképlete, diszkrimináns, gyöktényezős alak, ekvivalens átalakítás

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Másodfokú egyenlet megoldása konkrét együtthatókkal és paraméterekkel, a lépéseket párhuzamosan végezve
- Digitális eszköz használata egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása során

- Tanulói kiselőadás tartása magasabb fokú egyenletek megoldásának történetéről, érdekességeiről

## **TÉMAKÖR: A függvény fogalma, függvénytulajdonságok**

**ÓRASZÁM: 6/ 8 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- megad hétköznapi életben előforduló hozzárendeléseket;
- adott képlet alapján helyettesítési értékeket számol, és azokat táblázatba rendezi;
- táblázattal megadott függvény összetartozó értékeit ábrázolja koordináta-rendszerben;
- a grafikonról megállapítja függvények alapvető tulajdonságait.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Másodfokú függvény ábrázolása, jellemzése (ismétlés)
- Ábrázolás teljes négyzetté alakítással
- Függvénytranszformációk:  $f(x) + c$ ,  $f(x + c)$ ,  $c \cdot f(x)$ ,  $|f(x)|$
- Négyzetgyök függvény ábrázolása, jellemzése, transzformációk (ismétlés)
- Helyettesítési érték számolása, az  $f(x) = c$  alapján  $x$  meghatározása
- Egyszerű másodfokú függvénnyel jellemezhető, gyakorlati élethez kapcsolódó szélsőértékfeladatok (csak a heti 5 óra esetén)

### **FOGALMAK**

egyértelmű hozzárendelés, kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, értelmezési tartomány, képhalmaz, értékészlet, helyettesítési érték, szélsőérték, zérushely, növekedés, fogyás

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Egyszerű, másodfokú függvénnyel jellemezhető, gyakorlati helyzethez köthető szélsőértékfeladatok megoldása csoportmunkában, például adott hosszúságú spárgával bekeríthető maximális területű téglalap adatainak mérése, megfigyelése
- Függvények ábrázolása digitális eszköz segítségével

## **TÉMAKÖR: Háromszögek**

**ÓRASZÁM: 12/ 18 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- kiszámítja háromszögek területét.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben

- alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Számítások derékszögű háromszögekben szögfüggvények segítségével gyakorlati helyzetben
- Összefüggések ismerete egy adott szög különböző szögfüggvényei között: pitagoraszai összefüggés, pótszögek és mellékszögek
- *Szögfüggvények általánosítása: Szinuszfüggvény*
- Háromszög területének kiszámítása

#### FOGALMAK

szinusz, koszinusz, tangens

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A valós problémák matematikai modelljének megalkotása, problémák önálló megoldása
- Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésével
- Háromszög alakú részek területének meghatározása

### TÉMAKÖR: **Négyszögek, sokszögek**

**ÓRASZÁM: 4/ 5 óra**

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, úrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
- átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Speciális négyszögek (trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet) területének kiszámítása
- Szabályos sokszög területének kiszámítása

#### FOGALMAK

trapéz, húrtrapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet, konvex sokszög, szabályos sokszög

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Különböző típusú speciális négyszögek területének meghatározására vonatkozó formula felfedeztetése átdarabolással
- Projektmunka: lakás/iskola alaprajzának elkészítése méretarányosan

### TÉMAKÖR: **A kör és részei**

**ÓRASZÁM: 5/ 10 óra**



**TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ki tudja számolni a kör és részeinek kerületét, területét;

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával
- Annak ismerete és alkalmazása, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körcikk területével
- Kör, körcikk, körgyűrű és körszelet területének és kerületének kiszámítása

**FOGALMAK**

középponti szög, körív, körcikk, körgyűrű, körszelet

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Annak felfedeztetése méréssel, hogy a középponti szög egyenesen arányos a hozzá tartozó körív hosszával; különböző méretű körök esetén a kapott adatok táblázatba foglalása

**TÉMAKÖR: Transzformációk, szerkesztések**

**ÓRASZÁM: 12/ 16 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételt.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza a középpontos hasonlósági transzformációt, a hasonlósági transzformációt és az alakzatok hasonlóságát;

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A középpontos hasonlóság fogalma és tulajdonságai
- A középpontos hasonlósági transzformáció és a hasonlósági transzformáció ismerete, tulajdonságai
- A hasonlóság fogalmának ismerete és alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában
- Gyakorlati feladatok megoldása hasonlóság segítségével (például alaprajz-, térképkészítés, modellezés): szerkesztési, számítási, bizonyítási feladatok
- Hasonló alakzatok
- Háromszögek hasonlóságának alapesetei, sokszögek hasonlósága
- Hasonló síkidomok területének aránya

**FOGALMAK**

középpontos hasonlósági transzformáció, hasonlósági transzformáció, hasonlóság, a hasonlóság aránya

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Az iskola közelében lévő magas épület (például templomtorony) magasságának meghatározása egy egyenes bot segítségével a bot és az épület árnyékának méréséből („Thalész-módszer”) csoportmunkában
- Valódi távolságok, valódi útvonalak hosszának meghatározása papíralapú térkép alapján
- Gyakorlati feladatok megoldása hasonlóság segítségével

**TÉMAKÖR: Leíró statisztika****ÓRASZÁM: 9/ 10 óra****TANULÁSI EREDMÉNYEK****A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
- képes a számsokaság számtani közepét kiszámítani
- hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- adatsokaságból adott szempont szerint oszlop- és kördiagramot készít hagyományos és digitális eszközzel.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Statisztikai adatok gyűjtésének tervezése
- Statisztikai adatok gyűjtése hagyományos és internetes forrásból
- Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése középértékekkel hagyományos és digitális eszközzel
- A kapott adatok értelmezése, értékelése, egyszerű statisztikai következtetések
- Oszlop- és kördiagram értelmezése, valamint készítése hagyományos és digitális eszközzel
- Konkrét adatsokaság ábrázolásához, statisztikai kérdés megválaszolásához a megfelelő diagramtípus kiválasztása
- Kördiagramból oszlopdiagram készítése és viszont
- Grafikus manipulációk felismerése és javítása diagramok esetén
- Adathalmazok jellemzői: terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás

**FOGALMAK**oszlopdiagram, kördiagram, átlag, medián, módusz, *szórás***JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Adatgyűjtés megtervezése, például forgalomszámlálás vagy iskolai felmérés előkészítése
- A megtervezett statisztikai adatgyűjtés lebonyolítása, az eredmények szemléltetése grafikonok segítségével, a kapott eredmények értékelő bemutatása tanulói kiselőadás formájában
- Különböző adatsokaságok esetében annak vizsgálata, hogy ezek jellemezhetők-e az ismert középértékekkel

- Érvelés a tanuló saját érdemjegyei alapján különböző statisztikai jellemzők segítségével a kedvezőbb év végi jegyért
- Különböző sportágak értékelési rendszerének és statisztikáinak bemutatása tanulói kiselőadás keretében
- Osztályok/tantárgyak eredményeinek összehasonlítása érdemjegyek és ezek középértékei alapján
- Csoportmunka keretében adott céllal készülő, megtévesztő oszlop- és kördiagramok készítése, ezek szóbeli értékelése, javítása

## **TÉMAKÖR: Valószínűség-számítás**

**ÓRASZÁM: 8/12 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- tapasztalatai alapján véletlen jelenségek jövőbeni kimenetelére észszerűen tippel;
- véletlen kísérletek adatait rendszerezi, relatív gyakoriságokat számol, nagy elemszám esetén számítógépet alkalmaz.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Valószínűségi kísérletek elvégzése, gyakorisági, relatív gyakorisági táblázatok készítése
- A valószínűség fogalmának bevezetése statisztikai alapon
- A klasszikus valószínűségi modell fogalma és alkalmazása
- Diszkrét valószínűség-eloszlások ábrázolása hagyományos és digitális eszközzel

### **FOGALMAK**

valószínűségi kísérlet, esemény, elemi esemény, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség, diszkrét valószínűség-eloszlás

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (például dobások szabályos dobókockákkal, pénzérmékkel); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; tippelés az egyes kimenetelekre és becslés a bekövetkezésük valószínűségére
- Játékokban a szerencsefaktor vizsgálata, például „Ki nevet a végén” játék esetében az első hatos dobás eloszlása
- Különböző társasjátékokban stratégia meghatározása, döntéshozatal esélylatolgatás alapján
- Különböző szerencsejátékok (lottó, totó, póker, black jack, internetes sportfogadások) esetében a nyerési esély összehasonlítása

## 11–12. évfolyam

A 11–12. évfolyamon a tanulási-tanítási folyamatra jellemző, hogy az ismeretek jellege egyre absztraktabb és formálisabb, a matematika belső logikája egyre jobban érvényesül. Ebben a szakaszban az egyik nagyon fontos didaktikai cél a szimbolikus gondolkodás fejlesztése. A tanulóknak a korábban elsajátított készségekre, képességekre és ismeretanyagra támaszkodva kell eljutniuk az absztrakt összefüggések megértéséhez és tudatos alkalmazásához. Tudatosítani kell a matematikai fogalmak pontos definiálásának fontosságát és a matematikai bizonyítások szerepét. Amellett, hogy a lehetséges alkalmazásokat minden egyes témakör kapcsán szem előtt kell tartani, fontos, hogy a tanulók lássák az egyes matematikai területek kapcsolatát is.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló a tanár által irányított módon, a feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok ebben a szakaszban is fejlesztik a matematikai kommunikációt. Az érettségi vizsgára készüléskor egyre nagyobb hangsúlyt kap a tanulók önálló munkája mind a feladatmegoldásokban, mind a tanultak ismétlésében, rendszerezésében. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést, a felfedeztetést és a gyakorlást.

A 11–12. évfolyamon is jellemző, hogy a megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Bizonyos témakörök azonban ebben a szakaszban jelennek meg először. Ilyen a racionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény, a logaritmus, a számtani és mértani sorozatok, a trigonometria, a koordináta geometria és a térgeometria. Vannak olyan témakörök, amelyek ismeretei megjelennek más terület tanítása során is, ezért az egyes részekhez javasolt óraszámok ebben a szakaszban sem jellemeznek feltétlenül időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése, a trigonometria és a koordináta geometria alapjainak megjelenése, valamint a statisztikai és valószínűségi szemlélet mélyülése további lehetőségeket nyújt változatos hétköznapi és matematikai problémák megoldására. A matematikai eszköztár bővülése ebben a szakaszban teszi leginkább lehetővé, hogy a tanulók más tantárgyakban, más tanulási területeken is alkalmazni tudják matematikai tudásukat.

**A 11–12. évfolyamon a matematika tantárgy alapóraszámja 186 óra. Rendszerező összefoglalásra, az érettségi vizsgára történő felkészítésre a 12. évfolyam végén 38 óra áll rendelkezésre. Az egyes témakörökhöz írt óraszámok javaslatok. Az új ismeretek a teljes óraszám négyötöd része alatt a legtöbb tanuló számára elsajátíthatók, így a fennmaradó órák felhasználhatók ismétlésre, gyakorlásra, felzárkóztatásra, tehetséggondozásra és számonkérésre.**

### A TÉMAKÖRÖK ÁTTEKINTŐ TÁBLÁZATA:

Témakör neve	Javasolt óraszám
<b>Halmazok, matematikai logika</b>	6
<b>Kombinatorika, gráfok</b>	10
<b>Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése</b>	14
<b>Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus</b>	12
<b>Exponenciális folyamatok vizsgálata</b>	12
<b>Sorozatok</b>	18
<b>Trigonometria</b>	14
<b>Térgeometria</b>	20

<b>Koordinátageometria</b>	14
<b>Leíró statisztika</b>	12
<b>Valószínűség-számítás</b>	16
<b>Rendszerező összefoglalás</b>	38
<b>Összes óraszám:</b>	186

<b>Témakörök a 11-12. évfolyamon</b>	<b>11. évf. 3 óra 36 hét</b>	<b>11. évf. 6 óra 36 hét</b>	<b>12. évf. 4 óra 29 hét</b>	<b>12. évf. 7 óra 29 hét</b>
Halmazok, matematikai logika			6	
Kombinatorika, gráfok	10	12		
Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése	8	10		
Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus	18	26		
Exponenciális folyamatok vizsgálata	14	14		
Sorozatok		28	26	
Trigonometria	20	52		
Térgeometria			30	40
Koordinátageometria	18	48		
Leíró statisztika	10	4		
Valószínűség-számítás	10	10	10	10
Nevezetes egyenlőtlenség, szélsőérték		12		
Analízis				67
Rendszerező összefoglalás			44	86
<b>Összesen:</b>	<b>108</b>	<b>216</b>	<b>116</b>	<b>203</b>

## 11. ÉVFOLYAM KÖZÉPSZINT – 3 ÓRA

### TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok

ÓRASZÁM: 10 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;

- a kiválasztott modellben megoldja a problémát.

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold grafok segítségével.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Matematikai és hétköznapi helyzetekhez kötődő sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása
- A binomiális együttható fogalmának ismerete, értékének kiszámítása
- Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül
- A gráf csúcsainak fokszámösszege és éleinek száma közötti összefüggés ismerete és alkalmazása gyakorlati feladatok megoldásában

#### **FOGALMAK**

faktoriális, binomiális együttható; csúcs fokszáma gráfban

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Anagramma készítése a tanulók neveiből
- A pókerben előforduló lehetséges nyerő lapkombinációk számának meghatározása
- A Pascal-háromszög és tulajdonságai felfedeztetése például kéttagú összeg hatványaiban szereplő együtthatók segítségével
- Különböző szituációk kétféle módon történő összeszámlálása és ebből következő egyszerű kombinatorikus összefüggések felfedezése
- Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel konkrét lejátssza, a tapasztalatok összegyűjtése

### **TÉMAKÖR: Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése**

**ÓRASZÁM: 8 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

##### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza az oszthatóság alapvető fogalmait;
- összetett számokat felbont prímszámok szorzatára;
- meghatározza két természetes szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, és alkalmazza ezeket egyszerű gyakorlati feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az oszthatósági szabályokat;
- érti a helyi értékes írásmódot 10-es és más alapú számrendszerekben;
- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása a prímtényezősz felbontásból
- Összetett oszthatósági szabályok alkalmazása
- Számolás osztási maradékokkal (például összeg, szorzat, hatvány maradéka)

- Számok felírása 10-estől különböző alapú számrendszerben
- Az egész számok, a véges tizedes törtek, a végtelen szakaszos tizedes törtek és a racionális számok kapcsolata
- A számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásai a természetes számoktól a valós számokig
- Végtelen nem szakaszos tizedes törtek ismerete
- Példák irracionális számokra
- Számhalmazok műveleti zártsága

### FOGALMAK

természetes szám, egész szám, racionális szám, irracionális szám, valós szám, relatív prímekek

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Oszthatósággal kapcsolatos „bűvésztükkök” bemutatása
- Számrendszerek segítségével megoldható rejtvények
- Tanulói kiselőadás a 10-estől különböző alapú számrendszerek használatáról a múltban és ennek mai napig tartó hatásairól
- Tanulói kiselőadás számelméleti érdekességekről, például tökéletes számok és barátságos számpárok, prímszámok, jelenleg ismert legnagyobb prím, titkosítás
- Halmazábra elkészítése a számhalmazokról

## TÉMAKÖR: Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus

ÓRASZÁM: 18 óra

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza az  $n$ -edik gyök és a logaritmus fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza az  $n$ -edik gyök fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Az  $n$ -edik gyök fogalmának ismerete és alkalmazása
- Hatványozás pozitív alap és racionális kitevő esetén
- Hatványozás azonosságainak alkalmazása racionális kitevő esetén
- A hatványozás szemléletes értelmezése irracionális kitevő esetén
- Az exponenciális függvények ábrázolása hagyományosan és számítógéppel, a függvények tulajdonságai
- A logaritmus értelmezése
- Áttérés más alapú logaritmusra
- Számológép használata logaritmus értékének meghatározásához

### FOGALMAK

n-edik gyök, exponenciális függvény, logaritmus

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A permanencia-elv gyakorlati „kipróbálása” a definíció megadása előtt
- Matematikatörténeti érdekességek (például déloszi probléma) feldolgozása projektmunkában
- Különböző alapú exponenciális függvények ábrázolása milliméterpapíron, és a kapott grafikonok összehasonlítása csoportmunkában
- Nagy számok számjegyei számának meghatározása logaritmus segítségével
- 10-estől eltérő alapú logaritmus kiszámolása csak 10-es alapú logaritmus kiszámolására alkalmas számológéppel

### TÉMAKÖR: Exponenciális folyamatok vizsgálata

**ÓRASZÁM: 14 óra**

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
- megold egyszerű, a megfelelő definíció alkalmazását igénylő exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Exponenciális folyamatok vizsgálata a természetben és a társadalomban
- Exponenciális egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A gyakorlati (például pénzügyi, biológiai, fizikai, demográfiai, ökológiai) problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti probléma szövegébe visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve

#### FOGALMAK

Nincsenek új fogalmak.

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Tanulói kiselőadás az exponenciálisan változó folyamatokról a természetben és a társadalomban



- Adatgyűjtés különböző forrásokból származó, exponenciális vagy közelítőleg annak tekinthető változókra csoportmunkában
- Gyakorlati, időben exponenciálisnak tekinthető változást mutató grafikonokra exponenciális függvény illesztése digitális eszköz segítségével, és az illesztett függvény paramétereinek értelmezése

## **TÉMAKÖR: Trigonometria**

**ÓRASZÁM: 20 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri a hegyes- és tompaszögek szögfüggvényeinek összefüggéseit;
- alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban;
- a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
- kiszámítja háromszögek területét;
- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
- átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Tompszög szinusza, koszinusza, tangense
- Összefüggések ismerete egy adott szög különböző szögfüggvényei között: pitagoraszti összefüggés, pótszögek és mellékszögek szögfüggvényei
- Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
- Háromszög területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében
- Szinusz- és koszinusztétel ismerete és alkalmazása
- A szinusztétel bizonyítása
- Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével
- A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva
- Négyszögek és szabályos sokszögek területének kiszámítása

### **FOGALMAK**

szinusz, koszinusz, tangens, szinusztétel, koszinusztétel

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése
- Az iskolában vagy annak környezetében kijelölt, tetszőleges háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása csoportmunkában, távolságok és szögek mérése alapján
- Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában

## **TÉMAKÖR: Koordinátageometria**

**ÓRASZÁM: 18 óra****TANULÁSI EREDMÉNYEK****A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- megad pontot és vektort koordinátaival a derékszögű koordináta-rendszerben;
- koordináta-rendszerben ábrázol adott feltételeknek megfelelő ponthalmazokat;
- koordináták alapján számításokat végez szakaszokkal, vektorokkal;
- ismeri és alkalmazza az egyenes egyenletét;
- egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére;
- kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében;
- megadja és alkalmazza a kör egyenletét a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor fogalmak ismerete, alkalmazása
- A vektorok összeadása, kivonása, szorzása valós számmal, műveletek ismerete és alkalmazása
- Vektorok alkalmazása feladatok megoldásában
- Pont és vektor megadása koordinátákkal a derékszögű koordináta-rendszerben
- Adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok ábrázolása koordináta-rendszerben
- Két pont távolságának, vektor abszolút értékének meghatározása koordináták alapján
- Vektorok összegének, különbségének, számszorosának koordinátái
- Szakaszfelezőpont koordinátáinak meghatározása a végpontok koordinátái alapján
- Egyenes egyenlete  $y = mx + b$  vagy  $x = c$  alakban
- Egyenes meredekségének fogalma; egyenesek merőlegességének és párhuzamosságának megállapítása a meredekségek alapján
- Az egyenesek egyenletének ismeretében egyenesek metszéspontjának koordinátái
- A kör egyenletének megadása és alkalmazása a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében

**FOGALMAK**

vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor, vektorok összege, vektorok különbsége, vektor számszorosa, vektor koordinátái, alakzat egyenlete, egyenes egyenlete, kör egyenlete

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- „Torpedójáték” koordináta-rendszerben
- Helymeghatározás térképen a szélességi és hosszúsági adatok segítségével
- Ház/lakás alaprajzának elkészítése koordináta-rendszerben, az eredeti adatok alapján
- Játék helyvektorokkal dinamikus geometriai szoftver használatával
- Gondolattérkép készítése a koordinátageometria kapcsolatainak bemutatására csoportos vagy egyéni munkaformában

- „Oroszlánfogás”: lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása grafikusán, digitális eszköz segítségével
- „Célba lövés”: játék körökkel a koordináta-rendszerben

### **TÉMAKÖR: Leíró statisztika**

**ÓRASZÁM: 10 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
- hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- ismeri és alkalmazza a sodrófa (box-plot) diagramot adathalmazok jellemzésére, összehasonlítására;
- felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A reprezentatív minta fogalmának szemléletes ismerete
- Hétköznapi, társadalmi problémákhoz kapcsolódó statisztikai adatok tervszerű gyűjtése
- Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése kvartilisekkel, középpértékekkel és szóródási mutatókkal
- Sodrófa (box-plot) diagram készítése, alkalmazása
- A kapott adatok értelmezése, értékelése, statisztikai következtetések
- Nagy adathalmazok kezelése táblázatkezelő programmal
- Grafikus és szöveges statisztikai manipulációk felismerése

#### **FOGALMAK**

reprezentatív minta, sodrófa (box-plot) diagram, minimum, maximum, kiugró adat, kvartilisek, terjedelem, szórás

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Példák reprezentatív és nem reprezentatív mintavételre
- Szavazások szimulálása és különböző szavazatértékelő rendszerek vizsgálata iskolai körülmények között
- A Simpson-paradoxon bemutatása példákon
- Az interneten található, megbízható forrásból (pl. KSH honlapja) származó statisztikák értelmezése, elemzése, lehetséges következtetések megfogalmazása
- Különböző forrásokból származó adathalmazok statisztikai elemzése, értékelése, ezekből valamilyen adott szempont alapján manipulatív és nem manipulatív diagram készítése

### **TÉMAKÖR: Valószínűség-számítás**

**ÓRASZÁM: 10 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza;
- ismeri és alkalmazza a klasszikus valószínűségi modellt és a Laplace-képletet;
- ismeri és egyszerű esetekben alkalmazza a valószínűség geometriai modelljét;

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Példák ismerete események összegére, szorzatára, komplementer eseményre, egymást kizáró eseményekre
- Elemi események fogalmának ismerete, alkalmazása események előállítására
- Példák ismerete független és nem független eseményekre
- A klasszikus valószínűségi modell és a Laplace-képlet ismerete, alkalmazása
- A geometriai valószínűség fogalmának ismerete és alkalmazása
- A várható érték ismerete és meghatározása konkrét feladatokban, játékokban
- Pénzügyi fogalmakkal kapcsolatos valószínűségi ismeretek (például biztosítás, befektetések kockázata, árfolyamkockázat)

#### FOGALMAK

események összege, események szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események, geometriai valószínűség, várható érték

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (pl. szabályos dobókockákkal, pénzérmével dobálás); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; becslés az egyes kimenetekre, illetve összetett események valószínűségére csoportmunkában
- Példák keresése független és nem független, illetve egymást kizáró eseményekre csoportmunkában
- Orvosi tesztek eredményének esélyelemzése faábrák segítségével
- Egyszerű valószínűségi játékokhoz kapcsolódóan a várható nyereség és az igazságosság fogalmának kialakítása
- Konkrét bank konkrét befektetési portfóliójának értelmezése, elemzése
- Néhány konkrét biztosítási ajánlat értelmezése, elemzése

## 11. ÉVFOLYAM EMELTSZINT – 6 ÓRA

### TÉMAKÖR: Kombinatorika, gráfok

ÓRASZÁM: 12 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- megold sorba rendezési és kiválasztási feladatokat;
- konkrét szituációkat szemléltet és egyszerű feladatokat megold gráfok segítségével.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Matematikai és hétköznapi helyzetekhez kötődő sorba rendezési és kiválasztási feladatok megoldása
- A binomiális együttható fogalmának ismerete, értékének kiszámítása
- Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül
- A gráf csúcsainak fokszámösszege és éleinek száma közötti összefüggés ismerete és alkalmazása gyakorlati feladatok megoldásában
- *Gráfelméleti alapfogalmak: csúcs, él, fokszám, egyszerű gráf, összefüggő gráf, komplementer gráf, fagráf, kör, teljes gráf). Euler-vonal*
- *Permutáció, variáció, kombináció – ismétlés nélkül és ismétléssel.*
- *Binomiális együtthatók, tulajdonságaik. Pascal-háromszög és tulajdonságai.*
- *Binomiális tétel.*
- *Néhány kombinatorikus geometriai probléma.*

**FOGALMAK**

faktoriális, binomiális együttható; csúcs fokszáma gráfban, *egyszerű gráf, összefüggő gráf, komplementer gráf, fagráf, kör, teljes gráf). Euler-vonal, binomiális együttható*

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Anagramma készítése a tanulók neveiből
- A pókerben előforduló lehetséges nyerő lapkombinációk számának meghatározása
- A Pascal-háromszög és tulajdonságai felfedeztetése például kéttagú összeg hatványaiban szereplő együtthatók segítségével
- Különböző szituációk kétféle módon történő összeszámlálása és ebből következő egyszerű kombinatorikus összefüggések felfedezése
- Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel konkrét lejátéssza, a tapasztalatok összegyűjtése

**TÉMAKÖR: Számelméleti ismeretek, számhalmazok épülése**

**ÓRASZÁM: 10 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK****A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza az oszthatóság alapvető fogalmait;
- összetett számokat felbont prímszámok szorzatára;
- meghatározza két természetes szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét, és alkalmazza ezeket egyszerű gyakorlati feladatokban;
- ismeri és alkalmazza az oszthatósági szabályokat;
- érti a helyi értékes írásmódot 10-es és más alapú számrendszerekben;
- ismeri a számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásait a természetes számoktól a valós számokig;
- ismer példákat irracionális számokra.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös meghatározása a prímtényezősz felbontásból
- Összetett oszthatósági szabályok alkalmazása
- Számolás osztási maradékokkal (például összeg, szorzat, hatvány maradéka)
- Számok felírása 10-estől különböző alapú számrendszerben
- Az egész számok, a véges tizedes törtek, a végtelen szakaszos tizedes törtek és a racionális számok kapcsolata
- A számhalmazok épülésének matematikai vonatkozásai a természetes számoktól a valós számokig
- Végtelen nem szakaszos tizedes törtek ismerete
- Példák irracionális számokra
- Számhalmazok műveleti zártsága
- *Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a komplex számokig.*
- *Algebrai számok, transzcendens számok. Halmazok számossága.*
- *Halmazok ekvivalenciája.*
- *Végtelen és véges halmazok.*
- *Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok.*
- *Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások (fakultatív)*
- *Adott tulajdonságú matematikai objektumok konstruálása.*
- *Példák a matematika történetéből lehetetlenségi bizonyításokra, paradoxonokra*
- *A matematika felépítése*
- *Bizonyítási módszerek áttekintése: direkt, indirekt bizonyítás, logikai szita formula, skatulya elv, teljes indukció. Tételek megfordítása*

**FOGALMAK**

természetes szám, egész szám, racionális szám, irracionális szám, valós szám, relatív prímekek

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Oszthatósággal kapcsolatos „bűvésztükkök” bemutatása
- Számrendszerek segítségével megoldható rejtvények
- Tanulói kiselőadás a 10-estől különböző alapú számrendszerek használatáról a múltban és ennek mai napig tartó hatásairól
- Tanulói kiselőadás számelméleti érdekességekről, például tökéletes számok és barátságos számpárok, prímszámok, jelenleg ismert legnagyobb prím, titkosítás
- Halmazábra elkészítése a számhalmazokról

**TÉMAKÖR: Hatvány, gyök, exponenciális függvény, logaritmus**

**ÓRASZÁM: 26 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza az  $n$ -edik gyök és a logaritmus fogalmát
- *egyszerű exponenciális és logaritmusos egyenletek felírása szöveg alapján, az egyenletek megoldása, önálló ellenőrzése*

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza az  $n$ -edik gyök fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.
- *exponenciális függvény és logaritmusfüggvény ismerete*

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Az  $n$ -edik gyök fogalmának ismerete és alkalmazása
- *Az  $n$ -edik gyökre vonatkozó azonosságok, alkalmazásaik. Műveletek  $n$ -edik gyökkel*
- Hatványozás pozitív alap és racionális kitevő esetén
- Hatványozás azonosságainak alkalmazása racionális kitevő esetén
- A hatványozás szemléletes értelmezése irracionális kitevő esetén
- *Irracionális szám kétoldali közelítése racionális számokkal.*
- Az exponenciális függvények ábrázolása hagyományosan és számítógéppel, a függvények tulajdonságai
- *Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek*
- A logaritmus értelmezése
- *Áttérés más alapú logaritmusra, A logaritmus azonosságai, alkalmazásuk*
- Számológép használata logaritmus értékének meghatározásához
- *A logaritmusfüggvény ábrázolása, vizsgálata.*
- *Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolata. Inverz függvény.*
- *Logaritmosos egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek*
- *Paraméteres exponenciális és logaritmosos egyenletek. (kiegészítés, bővebben 12.osztályban az ismétlésnél)*

**FOGALMAK**

$n$ -edik gyök, exponenciális függvény, logaritmus, *racionális kitevőjű hatvány, exponenciális növekedés, csökkenés*

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- A permanencia-elv gyakorlati „kipróbálása” a definíció megadása előtt
- Matematikatörténeti érdekességek (például déloszi probléma) feldolgozása projekt munkában
- Különböző alapú exponenciális függvények ábrázolása milliméterpapíron, és a kapott grafikonok összehasonlítása csoportmunkában
- Nagy számok számjegyei számának meghatározása logaritmus segítségével
- 10-estől eltérő alapú logaritmus kiszámolása csak 10-es alapú logaritmus kiszámolására alkalmas számológéppel

**TÉMAKÖR: EXPONENCIÁLIS FOLYAMATOK VIZSGÁLATA**

**ÓRASZÁM: 14 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.
- *a mindennapok gyakorlatában szereplő feladatok megoldása a valós számkörben tanult új műveletek felhasználásával*

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg választát;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
- megold egyszerű, a megfelelő definíció alkalmazását igénylő exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket
- *exponenciális folyamatok matematikai modelljének megértése*

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Exponenciális folyamatok vizsgálata a természetben és a társadalomban
- Exponenciális egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A gyakorlati (például pénzügyi, biológiai, fizikai, demográfiai, ökológiai) problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti probléma szövegébe visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve

#### **FOGALMAK**

Nincsenek új fogalmak.

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Tanulói kiselőadás az exponenciálisan változó folyamatokról a természetben és a társadalomban
- Adatgyűjtés különböző forrásokból származó, exponenciális vagy közelítőleg annak tekinthető változókra csoportmunkában
- Gyakorlati, időben exponenciálisnak tekinthető változást mutató grafikonokra exponenciális függvény illesztése digitális eszköz segítségével, és az illesztett függvény paramétereinek értelmezése

### **TÉMAKÖR: Trigonometria**

**ÓRASZÁM: 52 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt
- *trigonometrikus függvények értelmezése, alkalmazása*



- *jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében*

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri a hegyes- és tompaszögek szögfüggvényeinek összefüggéseit;
- alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban;
- a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
- kiszámítja háromszögek területét;
- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
- átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Tompaszög szinusza, koszinusza, tangense
- Összefüggések ismerete egy adott szög különböző szögfüggvényei között: pitagorasz-i összefüggés, pótszögek és mellékszögek szögfüggvényei
- Szögfüggvény értékének ismeretében a szög meghatározása számológép segítségével
- Háromszög területének kiszámítása két oldal és a közbezárt szög ismeretében
- *A háromszög egy oldalának kifejezése a köré írt kör sugara és szemközti szög segítségével*
- *A szögfüggvények kiterjesztése forgásszögekre, trigonometrikus alapfüggvények ábrázolása, jellemzése és transzformálása*
- Szinusz- és koszinusztétel ismerete, *bizonyítása* és alkalmazása
- Számítások négyszögekben, sokszögekben szögfüggvények segítségével
- A környezetben található tárgyak magasságának, pontok távolságának meghatározása mért adatokból számítva
- Négyszögek és szabályos sokszögek területének kiszámítása
- *A vektorokról tanultak rendszerező ismétlése, koordináták*
- *Két vektor skaláris szorzata, vektoriális szorzat (kiegészítő anyag)*
- *Szögfüggvények közötti összefüggések. Addíciós tételek:*
- *két szög összegének és különbségének szögfüggvényei,*
- *egy szög kétszeresének szögfüggvényei,*
- *félszögek szögfüggvényei (kiegészítő anyag)*
- *két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása*
- *A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása.*
- *Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása.*
- *Háromszögekre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel*
- *Trigonometrikus egyenletek: Elsőfokú, Másodfokú (A  $\sin^2x + \cos^2 x = 1$  összefüggés )  $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$  típusú egyenletek , addíciós tételek alkalmazása egyenletek megoldásában . Az összes megoldás megkeresése. Hamis gyökök elkerülése.*
- *Trigonometrikus egyenlőtlenségek.*
- *Időtől függő periodikus jelenségek vizsgálata (kapcsolódás fizikai problémákhoz)*
- *Trigonometrikus kifejezések szélsőértékének keresése.*

#### **FOGALMAK**

szinusz, koszinusz, tangens, szinusztétel, koszinusztétel, *skaláris szorzat, addíciós tétel*

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Tanulói kiselőadás a trigonometrikus ismeretek hétköznapi életben, munkában való felhasználhatóságáról, például: lakberendezés, ácsmunka, GPS működése
- Az iskolában vagy annak környezetében kijelölt, tetszőleges háromszög, illetve négyszög alakú részek területének meghatározása csoportmunkában, távolságok és szögek mérése alapján
- Épület magasságának meghatározása a látószög és a távolságok mérésének segítségével csoportmunkában

## **TÉMAKÖR: Koordinátageometria**

**ÓRASZÁM: 48 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- megad pontot és vektort koordinátaival a derékszögű koordináta-rendszerben;
- koordináta-rendszerben ábrázol adott feltételeknek megfelelő ponthalmazokat;
- koordináták alapján számításokat végez szakaszokkal, vektorokkal;
- *ismeri és alkalmazza két vektor skaláris szorzatát;*
- ismeri és alkalmazza az egyenes egyenletét;
- egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére;
- kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében;
- megadja és alkalmazza a kör egyenletét a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor fogalmak ismerete, alkalmazása
- A vektorok összeadása, kivonása, szorzása valós számmal, műveletek ismerete és alkalmazása
- Vektorok alkalmazása feladatok megoldásában
- Pont és vektor megadása koordinátákkal a derékszögű koordináta-rendszerben
- Adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok ábrázolása koordináta-rendszerben
- Két pont távolságának, vektor abszolút értékének meghatározása koordináták alapján
- Vektorok összegének, különbségének, számszorosának koordinátái
- Szakaszfelezőpont koordinátáinak meghatározása a végpontok koordinátái alapján
- *Egyenes egyenletei*
- Egyenes meredekségének fogalma; egyenesek merőlegességének és párhuzamosságának megállapítása a meredekségek alapján
- Az egyenesek egyenletének ismeretében egyenesek metszéspontjának koordinátái
- A kör egyenletének megadása és alkalmazása a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében
- *Két vektor hajlásszöge*
- *Szakasz osztópontjának koordinátái*

- *A háromszög súlypontjának koordinátái*
- *Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens.*
- *A különböző jellemzők közötti kapcsolat értése, használata.*
- *Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel.*
- *Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata.*
- *A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása*
- *Két egyenes szöge.*
- *Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata.*
- *Kör és egyenes kölcsönös helyzete.*
- *A kör érintőjének egyenlete.*
- *Két kör közös pontjainak meghatározása.*
- *Szerkeszthetőségi kérdések*
- *A parabola tengelyponti egyenlete.*
- *A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes.*
- *A parabola és a másodfokú függvény. Teljes négyzetté kiegészítés.*
- *A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete*
- *Összetett feladatok megoldása paraméter segítségével vagy az euklideszi szerkesztés menetének követésével.*
- *Mértani helyek keresése.*
- *Merőleges affinitással kapott mértani helyek.*
- *Ponthalmazok a koordinátasíkon. Egyenlőtlenséggel megadott egyszerű feltételek.*
- *Lineáris programozási feladat (kiegészítés)*

### FOGALMAK

vektor, vektor abszolút értéke, nullvektor, ellentett vektor, helyvektor, vektorok összege, vektorok különbsége, vektor számszorosa, vektor koordinátái, alakzat egyenlete, egyenes egyenlete, kör egyenlete, *iránytényező, parabola*

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- „Torpedójáték” koordináta-rendszerben
- Helymeghatározás térképen a szélességi és hosszúsági adatok segítségével
- Ház/lakás alaprajzának elkészítése koordináta-rendszerben, az eredeti adatok alapján
- Játék helyvektorokkal dinamikus geometriai szoftver használatával
- Gondolattérkép készítése a koordináta geometria kapcsolatainak bemutatására csoportos vagy egyéni munkaformában
- „Oroszlánfogás”: lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldása grafikusan, digitális eszköz segítségével
- „Célba lövés”: játék körökkel a koordináta-rendszerben

### TÉMAKÖR: Leíró statisztika

**ÓRASZÁM:** 4 óra

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;

- hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- ismeri és alkalmazza a sodrófa (box-plot) diagramot adathalmazok jellemzésére, összehasonlítására;
- felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A reprezentatív minta fogalmának szemléletes ismerete
- Hétköznapi, társadalmi problémákhoz kapcsolódó statisztikai adatok tervszerű gyűjtése
- Statisztikai adatok rendszerezése, jellemzése kvartilisekkel, középvértékekkel és szóródási mutatókkal
- Sodrófa (box-plot) diagram készítése, alkalmazása
- A kapott adatok értelmezése, értékelése, statisztikai következtetések
- Nagy adathalmazok kezelése táblázatkezelő programmal
- Grafikus és szöveges statisztikai manipulációk felismerése

#### FOGALMAK

reprezentatív minta, sodrófa (box-plot) diagram, minimum, maximum, kiugró adat, kvartilisek, terjedelem, szórás

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Példák reprezentatív és nem reprezentatív mintavételre
- Szavazások szimulálása és különböző szavazatértékelő rendszerek vizsgálata iskolai körülmények között
- A Simpson-paradoxon bemutatása példákon
- Az interneten található, megbízható forrásból (pl. KSH honlapja) származó statisztikák értelmezése, elemzése, lehetséges következtetések megfogalmazása
- Különböző forrásokból származó adathalmazok statisztikai elemzése, értékelése, ezekből valamilyen adott szempont alapján manipulatív és nem manipulatív diagram készítése

### TÉMAKÖR: Valószínűség-számítás

**ÓRASZÁM: 10 óra**

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza;
- ismeri és alkalmazza a klasszikus valószínűségi modellt és a Laplace-képletet;
- ismeri és egyszerű esetekben alkalmazza a valószínűség geometriai modelljét;
- meghatározza a valószínűséget visszatevéses, illetve visszatevés nélküli mintavétel esetén.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Példák ismerete események összegére, szorzatára, komplementer eseményre, egymást kizáró eseményekre
- Elemi események fogalmának ismerete, alkalmazása események előállítására
- Példák ismerete független és nem független eseményekre

- A klasszikus valószínűségi modell és a Laplace-képlet ismerete, alkalmazása
- A geometriai valószínűség fogalmának ismerete és alkalmazása
- A várható érték ismerete és meghatározása konkrét feladatokban, játékokban
- Pénzügyi fogalmakkal kapcsolatos valószínűségi ismeretek (például biztosítás, befektetések kockázata, árfolyamkockázat)
- *Eseményalgebra, kapcsolat a halmazok és a logika műveleteivel*
- *Klasszikus valószínűségi modell: Események összegének, szorzatának, komplementérének valószínűsége, kizáró események, független események valószínűsége.*
- *Feltételes valószínűség.*
- *Mintavételre vonatkozó valószínűségek megoldása klasszikus modell alapján*
- *Nagy számok törvénye. (Szemléletes tárgyalás képletek nélkül.)*

### FOGALMAK

események összege, események szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események, geometriai valószínűség, várható érték

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Konkrét valószínűségi kísérletek végrehajtása vagy dinamikus szoftver segítségével történő szimulálása (pl. szabályos dobókockákkal, pénzérmével dobálás); a kapott gyakoriságok és relatív gyakoriságok táblázatba foglalása; becslés az egyes kimenetek, illetve összetett események valószínűségére csoportmunkában
- Példák keresése független és nem független, illetve egymást kizáró eseményekre csoportmunkában
- Orvosi tesztek eredményének esélyelemzése faábrák segítségével
- Egyszerű valószínűségi játékokhoz kapcsolódóan a várható nyereség és az igazságosság fogalmának kialakítása
- Konkrét bank konkrét befektetési portfóliójának értelmezése, elemzése
- Néhány konkrét biztosítási ajánlat értelmezése, elemzése

### TÉMAKÖR: Sorozatok

**ÓRASZÁM: 28 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- számtani és mértani sorozatokat adott szabály alapján felír, folytat;
- a számtani/mértani sorozat  $n$ -edik tagját felírja az első tag és a különbség (differencia)/hányados (kvóciens) ismeretében;
- a számtani/mértani sorozatok első  $n$  tagjának összegét kiszámolja;
- ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát;
- mértani sorozatokra vonatkozó ismereteit használja gazdasági, pénzügyi, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A számsorozat fogalmának ismerete

- Számsorozat megadása képlettel, rekurzióval
- Számtani és mértani sorozatok felírása, folytatása adott szabály szerint
- Számtani sorozat, az n-edik tag, az első n tag összege
- Mértani sorozat, az n-edik tag, az első n tag összege
- A számtani és a mértani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet bizonyítása
- Számtani és mértani sorozatokra vonatkozó ismeretek alkalmazása gazdasági, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában
- Megtakarítási és kamatozási formák, ezek összehasonlítása
- Egyszerű kamat, kamatos kamat, gyűjtőjárdék és törlesztőrészlet számítása
- Megtakarítási, befektetési és hitelfelvételi lehetőségekkel és azok kockázati tényezőivel kapcsolatos feladatok megoldása
- *Számtani és mértani sorozatból előállított szorzatok összegzése*
- *Sorozatok konvergenciája*
- *A határérték szemléletes és pontos definíciói*
- *Műveletek konvergens sorozatokkal. Konvergens és divergens sorozatok*
- *Az  $\sqrt[n]{a}$ ,  $\sqrt[n]{n}$ ,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  sorozatok*
- *Konvergens sorozatok tulajdonságai.*
- *Torlódási pont.*
- *Konvergens sorozatnak egy határértéke van.*
- *Minden konvergens sorozat korlátos.*
- *Monoton és korlátos sorozat konvergens*
- *Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek. Rendőrelv.*
- *Végtelen sorok, konvergenciája, összege, végtelen mértani sor*

### FOGALMAK

számsorozat, tőke, kamatláb, kamat, futamidő, gyűjtőjárdék, törlesztőrészlet, *rekurzív sorozat*

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Tanulói kiselőadás tartása nevezetes sorozatokról, például Fibonacci-sorozat
- Az első 100 pozitív természetes szám összegének meghatározása a „kis” Gauss módszerével
- A sakktáblára elhelyezett, mezőről mezőre kétszeres számú búzaszemek kérdésének bemutatása
- Valódi pénzügyi termékek kamatozási és egyéb feltételeinek összehasonlítása csoportmunkában internetes adatgyűjtés segítségével

### TÉMAKÖR: Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása

**ÓRASZÁM: 12 óra**

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása.
- A modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal.

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- A szélsőérték-problémához illő megoldási mód kiválasztása.

- Gyakorlat optimális megoldások keresésében.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Azonos egyenlőtlenségek
- Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek
- Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek alkalmazása szélsőérték-feladatok megoldásában
- Szélsőérték-feladatok megoldása függvénytulajdonságok segítségével

#### FOGALMAK

szélsőérték hely, szélsőérték, nevezetes közép

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

Tanulói kiselőadás tartása nevezetes közepekről

## 12. ÉVFOLYAM KÖZÉPSZINT – 4 ÓRA

### TÉMAKÖR: Halmazok, matematikai logika

ÓRASZÁM: 6 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
- tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatok bemutatása példákon keresztül
- Logikai kifejezések megfelelő használata
- Egyszerű állítások indoklása, tételek bizonyítása
- Stratégiai és logikai játékok

#### FOGALMAK

logikai műveletek

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- A tanulók mindennapi tapasztalataihoz köthető, összetett állítások logikai értékének meghatározása igazságtáblázat segítségével
- Rejtvényűjságokban szereplő feladványok megfejtése következtetések láncolatán keresztül
- Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
- Stratégiai játékok, például NIM játékok, táblás játékok
- Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

### TÉMAKÖR: Sorozatok

ÓRASZÁM: 26 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- számtani és mértani sorozatokat adott szabály alapján felír, folytat;
- a számtani/mértani sorozat  $n$ -edik tagját felírja az első tag és a különbség (differencia)/hányados (kvóciens) ismeretében;
- a számtani/mértani sorozatok első  $n$  tagjának összegét kiszámolja;
- ismeri és alkalmazza a százalékalap, -érték, -láb, -pont fogalmát;
- mértani sorozatokra vonatkozó ismereteit használja gazdasági, pénzügyi, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A számsorozat fogalmának ismerete
- Számsorozat megadása képlettel, rekurzióval
- Számtani és mértani sorozatok felírása, folytatása adott szabály szerint
- Számtani sorozat, az  $n$ -edik tag, az első  $n$  tag összege
- Mértani sorozat, az  $n$ -edik tag, az első  $n$  tag összege
- A számtani és a mértani sorozat első  $n$  tagjának összegére vonatkozó képlet bizonyítása
- Számtani és mértani sorozatokra vonatkozó ismeretek alkalmazása gazdasági, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában
- Megtakarítási és kamatozási formák, ezek összehasonlítása
- Egyszerű kamat, kamatos kamat, gyűjtőjárdék és törlesztőrészlet számítása
- Megtakarítási, befektetési és hitelfelvételi lehetőségekkel és azok kockázati tényezőivel kapcsolatos feladatok megoldása

#### **FOGALMAK**

számsorozat, tőke, kamatláb, kamat, futamidő, gyűjtőjárdék, törlesztőrészlet

#### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Tanulói kiselőadás tartása nevezetes sorozatokról, például Fibonacci-sorozat
- Az első 100 pozitív természetes szám összegének meghatározása a „kis” Gauss módszerével
- A sakktáblára elhelyezett, mezőről mezőre kétszeres számú búzaszemek kérdésének bemutatása
- Valódi pénzügyi termékek kamatozási és egyéb feltételeinek összehasonlítása csoportmunkában internetes adatgyűjtés segítségével

### **TÉMAKÖR: Térgeometria**

**ÓRASZÁM: 30 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- terület, kerület, felszín és térfogat kiszámítása különböző testek esetén

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;



- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- ismeri és alkalmazza a hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságait;
- lerajzolja a kocka, téglatest, egyenes hasáb, egyenes körhenger, egyenes gúla, forgáskúp hálóját;
- kiszámítja a speciális testek felszínét és térfogatát egyszerű esetekben;
- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tétteleket;
- ismeri és alkalmazza a hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tétteleket.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Tételek kölcsönös helyzetének, távolságának és hajlásszögének ismerete, alkalmazása feladatmegoldásban
- A terület, térfogat, űrtartalom mértékegységeinek és ezek átváltási szabályainak ismerete
- Sűrűség mértékegységei közötti átváltás ismerete
- Sík- és térgeometriai feladatoknál a válasz megadása a problémának megfelelő mértékegységben
- A hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságainak ismerete és alkalmazása a hétköznapi életben előforduló testekkel kapcsolatban
- A kocka, a téglatest, az egyenes hasáb, az egyenes körhenger, az egyenes gúla és a forgáskúp hálójának lerajzolása konkrét esetekben
- A mindennapi életben előforduló hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp alakú tárgyak felszínének és térfogatának meghatározása méréssel és számítással
- Síkidomok forgatásával keletkező egyszerű, a mindennapi életben is előforduló testek felszínének és térfogatának kiszámítása
- A hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása
- A hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása

#### FOGALMAK

kocka, téglatest, hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp, egyenes test, forgástest, n-oldalú szabályos gúla, tetraéder, alaplap, oldallap, alapél, oldalél, alkotó, palást, testmagasság, test hálója

#### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

- Hétköznapi tárgyak (üdítődoboz, vizesflakon, tejfölddoboz stb.) térfogatának megállapítása méréssel, a kapott eredmény összehasonlítása a tárgyon szereplő értékkel
- A Louvre bejáratoként épített üvegpíramis földfelszín feletti térfogatának és az üvegfelület felszínének meghatározása (szükséges adatok gyűjtése az internetről)

- Annak becslése csoportmunkában, hogy a teret milyen arányban tudjuk kitölteni egybevágó érintkező gömbökkel különböző elrendezések esetén
- Különböző méretű, megközelítőleg gömb alakú gyümölcsök térfogatának és felszínének becslése, a becslés ellenőrzése méréssel
- A Föld felszínének és térfogatának közelítése földgömbmodellen méréssel és számolással, majd a kapott értékek összevetése a hivatalos adatokkal
- Projektmunka a gömbről: hogyan jelenik meg a gömb a mindennapi életben, a többi tantárgyban és a matematikában; a gömbi geometria alapjai

## **TÉMAKÖR: Valószínűség-számítás**

**ÓRASZÁM: 10 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza a klasszikus valószínűségi modellt és a Laplace-képletet;
- ismeri és egyszerű esetekben alkalmazza a valószínűség geometriai modelljét;
- meghatározza a valószínűséget visszatevéses, illetve visszatevés nélküli mintavétel esetén.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A klasszikus valószínűségi modell és a Laplace-képlet ismerete, alkalmazása
- A geometriai valószínűség fogalmának ismerete és alkalmazása
- Valószínűségek meghatározása visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel esetén
- A várható érték ismerete és meghatározása konkrét feladatokban, játékokban
- Pénzügyi fogalmakkal kapcsolatos valószínűségi ismeretek (például biztosítás, befektetések kockázata, árfolyamkockázat)

### **FOGALMAK**

események összege, események szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események, geometriai valószínűség, visszatevéses mintavétel, visszatevés nélküli mintavétel, várható érték

### **JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Egyszerű valószínűségi játékokhoz kapcsolódóan a várható nyeremény és az igazságosság fogalmának kialakítása
- Gyakorlati problémákban a mintavétel típusának felismerése és a valószínűség meghatározása: pl. vércsoport, fertőzöttség, kétféle tulajdonságú elemekből álló halmazokra vezető problémák
- Konkrét bank konkrét befektetési portfóliójának értelmezése, elemzése
- Néhány konkrét biztosítási ajánlat értelmezése, elemzése

## **12. ÉVFOLYAM EMELTSZINT – 7 ÓRA**

### **TÉMAKÖR: Halmazok, matematikai logika**

**ÓRASZÁM: 6 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- látja a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatokat;
- megállapítja egyszerű „ha ... , akkor ...” és „akkor és csak akkor” típusú állítások logikai értékét;
- tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A halmazműveletek és a logikai műveletek közötti kapcsolatok bemutatása példákon keresztül
- Logikai kifejezések megfelelő használata
- Egyszerű állítások indoklása, tételek bizonyítása
- Stratégiai és logikai játékok

**FOGALMAK**

logikai műveletek

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- A tanulók mindennapi tapasztalataihoz köthető, összetett állítások logikai értékének meghatározása igazságtáblázat segítségével
- Rejtvényújságokban szereplő feladványok megfejtése következtetések láncolatán keresztül
- Logikai készséget fejlesztő játékok, például „Einstein-fejtörő”
- Stratégiai játékok, például NIM játékok, táblás játékok
- Tudatos pénzügyi tervezést segítő játékok

**TÉMAKÖR: Analízis**

**ÓRASZÁM: 67 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK****A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- ismeri a függvények vizsgálatának új módszerét
- közelítő módszerek ismerete

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- a differenciálszámítás módszereit használja a függvények lokális és globális tulajdonságainak vizsgálatára;
- a függvény alatti terület alkalmazásai a matematika és a fizika több területén.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- függvények jellemzése (ismétlés)
- függvény határértéke, fogalom, jelölések
- függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke
- a sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata
- a  $\frac{\sin x}{x}$  függvény vizsgálata, az  $x = 0$  helyen vett határértéke
- függvények folytonossága, definíció
- korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai (Bizonyítások nélkül, de ellenpéldákkal azokra az esetekre, ha az intervallum nem korlátos, nem zárt, illetve ha a függvény nem folytonos)
- a függvénygörbe érintőjének iránytangense, a pillanatnyi sebesség meghatározása

- a differenciálhatóság fogalma: különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény,
- példák nem differenciálható függvényekre is.
- kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között
- alapfüggvények deriváltja: konstans függvény,  $x^n$ , trigonometrikus függvények deriváltja
- műveletek differenciálható függvényekkel: Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg-, szorzat-, hányados-, összetett függvény deriváltja.
- exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. (Bizonyítás nélkül.)
- magasabbrendű deriváltak.
- a függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata: monotonitás, szélsőérték
- a szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása
- konvexitás vizsgálata deriválással, inflexiós pont, a második derivált és a konvexitás kapcsolata
- függvényvizsgálat differenciálszámítással
- gyakorlati jellegű szélsőérték-feladatok megoldása
- bevezető feladatok az integrál fogalmához: grafikon alatti terület
- alsó és felső közelítő összegek
- a határozott integrál fogalma, jelölése
- az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele.
- korlátos és monoton függvények integrálhatósága.
- a határozott integrál tulajdonságai
- az integrál mint a felső határ függvénye, integrálfüggvény, kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálás között
- primitív függvény, határozatlan integrál: hatvány-, polinom-, trigonometrikus, exponenciális, logaritmusfüggvény, Newton-Leibniz-tétel
- integrálási módszerek, integrálás helyettesítéssel
- integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra
- két függvénygörbe közötti terület meghatározása
- forgástest térfogatának meghatározása

### FOGALMAK

függvényfolytonosság, -határérték, különbségi hányados függvény, derivált, deriváltfüggvény, magasabb rendű derivált, monotonitás, lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték, konvex, konkáv függvény, alsó- és felső közelítő összeg, határozott integrál, primitív függvény, határozatlan integrál. Newton-Leibniz-tétel.

### JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK

–

### TÉMAKÖR: Térgeometria

**ÓRASZÁM: 40 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:**

- terület, kerület, felszín és térfogat kiszámítása különböző testek esetén

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, úrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- ismeri és alkalmazza a hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságait;
- lerajzolja a kocka, téglatest, egyenes hasáb, egyenes körhenger, egyenes gúla, forgáskúp hálóját;
- kiszámítja a speciális testek felszínét és térfogatát egyszerű esetekben;
- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket;
- ismeri és alkalmazza a hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételeket.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Térelemek kölcsönös helyzetének, távolságának és hajlásszögének ismerete, alkalmazása feladatmegoldásban
- A terület, térfogat, úrtartalom mértékegységeinek és ezek átváltási szabályainak ismerete
- Sűrűség mértékegységei közötti átváltás ismerete
- Sík- és térgeometriai feladatoknál a válasz megadása a problémának megfelelő mértékegységben
- *A területszámítás alapelvei, néhány egyszerűbb alakzat területének levezetése az alapelvekből*
- A hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságainak ismerete és alkalmazása a hétköznapi életben előforduló testekkel kapcsolatban
- A kocka, a téglatest, az egyenes hasáb, az egyenes körhenger, az egyenes gúla és a forgáskúp hálójának lerajzolása konkrét esetekben
- A mindennapi életben előforduló hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp alakú tárgyak felszínének és térfogatának meghatározása méréssel és számítással
- Síkidomok forgatásával keletkező egyszerű, a mindennapi életben is előforduló testek felszínének és térfogatának kiszámítása
- *Euler-féle poliéder-tétel. (Bizonyítás nélkül.) Szabályos testek*
- A hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása
- A hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása

**FOGALMAK**

kocka, téglatest, hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp, egyenes test, forgástest, n-oldalú szabályos gúla, tetraéder, alaplap, oldallap, alapél, oldalél, alkotó, palást, testmagasság, test hálója

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Hétköznapi tárgyak (üdítősdoboz, vizesflakon, tejfölösdoboz stb.) térfogatának megállapítása méréssel, a kapott eredmény összehasonlítása a tárgyon szereplő értékkel
- A Louvre bejárataként épített üvegpiramis földfelszín feletti térfogatának és az üvegfelület felszínének meghatározása (szükséges adatok gyűjtése az internetről)
- Annak becslése csoportmunkában, hogy a teret milyen arányban tudjuk kitölteni egybevágó érintkező gömbökkel különböző elrendezések esetén
- Különböző méretű, megközelítőleg gömb alakú gyümölcsök térfogatának és felszínének becslése, a becslés ellenőrzése méréssel
- A Föld felszínének és térfogatának közelítése földgömbmodellen méréssel és számolással, majd a kapott értékek összevetése a hivatalos adatokkal
- Projektmunka a gömbről: hogyan jelenik meg a gömb a mindennapi életben, a többi tantárgyban és a matematikában; a gömbi geometria alapjai

**TÉMAKÖR: Valószínűség-számítás****ÓRASZÁM: 10 óra****TANULÁSI EREDMÉNYEK****A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és alkalmazza a klasszikus valószínűségi modellt és a Laplace-képletet;
- ismeri és egyszerű esetekben alkalmazza a valószínűség geometriai modelljét;
- meghatározza a valószínűséget visszatevéses, illetve visszatevés nélküli mintavétel esetén.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A klasszikus valószínűségi modell és a Laplace-képlet ismerete, alkalmazása
- A geometriai valószínűség fogalmának ismerete és alkalmazása
- Valószínűségek meghatározása visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel esetén
- A várható érték ismerete és meghatározása konkrét feladatokban, játékokban
- Pénzügyi fogalmakkal kapcsolatos valószínűségi ismeretek (például biztosítás, befektetések kockázata, árfolyamkockázat)

**FOGALMAK**

események összege, események szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események, geometriai valószínűség, visszatevéses mintavétel, visszatevés nélküli mintavétel, várható érték

**JAVASOLT TEVÉKENYSÉGEK**

- Egyszerű valószínűségi játékokhoz kapcsolódóan a várható nyereség és az igazságosság fogalmának kialakítása
- Gyakorlati problémákban a mintavétel típusának felismerése és a valószínűség meghatározása: pl. vércsoport, fertőzöttség, kétféle tulajdonságú elemekből álló halmazokra vezető problémák
- Konkrét bank konkrét befektetési portfóliójának értelmezése, elemzése
- Néhány konkrét biztosítási ajánlat értelmezése, elemzése

## Matematika 9/AJTP évfolyam

[https://www.oktatas.hu/koznevelas/kerettantervek/2020\\_nat/AJTP\\_kerettantervek](https://www.oktatas.hu/koznevelas/kerettantervek/2020_nat/AJTP_kerettantervek) oldalon levő anyagot használtuk alapul.

Az iskolai matematikatanítás célja, hogy hiteles képet nyújtson a matematikáról, mint tudásrendszerről és mint sajátos emberi megismerési, gondolkodási, szellemi tevékenységről. A matematika tanulása érzelmi és motivációs vonatkozásokban is formálja, gazdagítja a személyiséget, fejleszti az önálló, rendszerezett gondolkodást, és alkalmazásra képes tudást hoz létre. A matematikai gondolkodás fejlesztése segíti a gondolkodás általános kultúrájának kiteljesedését.

A matematikatanítás feladata a matematika különböző arculatainak bemutatása. A matematika kulturális örökség; gondolkodásmód; alkotó tevékenység; a gondolkodás örömeinek forrása; a mintákban, struktúrákban tapasztalható rend és esztétikum megjelenítője; önálló tudomány; más tudományok segítője; a mindennapi élet része és a szakmák eszköze.

A tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztése során alapvető cél, hogy mindinkább ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvényteni, statisztikai stb.) és leírásokat. A matematikai nevelés sokoldalúan fejleszti a tanulók modellalkotó tevékenységét. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságának eldöntését segítő képességek fejlesztése. Egyaránt lényeges a reprodukív és a problémamegoldó, valamint az alkotó gondolkodásmód megismerése, elsajátítása, miközben nem szorulhat háttérbe az alapvető tevékenységek (pl. mérés, alapszerkesztések), műveletek (pl. aritmetikai, algebrai műveletek, transzformációk) automatizált végzése sem. A tanulás elvezethet a matematika szerepének megértésére a természet- és társadalomtudományokban, a humán kultúra számos ágában. Segít kialakítani a megfogalmazott összefüggések, hipotézisek bizonyításának igényét. Megmutathatja a matematika hasznosságát, belső szépségét, az emberi kultúrában betöltött szerepét. Fejleszti a tanulók térbeli tájékozódását, esztétikai érzékét.

A tanulási folyamat során fokozatosan megismertetjük a tanulókkal a matematika belső struktúráját (fogalmak, axiómák, tételek, bizonyítások elsajátítása). Mindezzel fejlesztjük a tanulók absztrakciós és szintetizáló képességét. Az új fogalmak alkotása, az összefüggések felfedezése és az ismeretek feladatokban való alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a kreativitást, az önálló gondolatok megfogalmazását, a felmerült problémák megfelelő önbizalommal történő megközelítését, megoldását. A diszkussziós képesség fejlesztése, a többféle megoldás keresése, megtalálása és megbeszélése a többféle nézőpont érvényesítését, a komplex problémakezelés képességét is fejleszti. A folyamat végén a tanulók eljutnak az önálló, rendszerezett, logikus gondolkodás bizonyos szintjére.

A tantárgy a különböző témakörök szerves egymásra épülésével kívánja feltárni a matematika és a matematikai gondolkodás világát. A fogalmak, összefüggések érlelése és a matematikai gondolkodásmód kialakítása egyre emelkedő szintű spirális felépítést indokol – az életkori, egyéni fejlődési és érdeklődési sajátosságoknak, a bonyolódó ismereteknek, a fejlődő absztrakciós képességnek megfelelően. Ez a felépítés egyaránt lehetővé teszi a lassabban haladókkal való foglalkozást és a tehetség kibontakoztatását.

A matematikai értékek megismerésével és a matematikai tudás birtokában a tanulók hatékonyan tudják használni a megszerzett kompetenciákat az élet különböző területein. A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technikai, a humán műveltségterületek, illetve a választott szakma ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák értelmezéséhez, leírásához és kezeléséhez. Ezért a tanulóknak rendelkezniük kell azzal a képességgel és készséggel, hogy alkalmazni tudják matematikai tudásukat, és felismerjék, hogy a megismert fogalmakat és tételeket változatos területeken használhatjuk. Az adatok, táblázatok, grafikonok értelmezésének megismerése nagyban segíthet a mindennapokban, és különösen a média közleményeiben való reális tájékozódásban. Mindehhez elengedhetetlen egyszerű matematikai szövegek értelmezése, elemzése. A tanulóktól megkívánjuk a szaknyelv életkornak megfelelő, pontos használatát, a jelölésrendszer helyes alkalmazását írásban és szóban egyaránt.

Az előkészítő évről biztosítani kell azokat a tárgyi tudásbeli alapokat, amelyek majd a középiskolai anyag elsajátításához szükségesek. El kell kezdeni kialakítani azt a gondolkodáskultúrát, amely a további sikeres tanulmányokat lehetővé teszi. Talán az előzőeknél is fontosabb, hogy a matematikához és általában a problémamegoldáshoz olyan pozitív hozzáállást alakítsunk ki, amely a későbbiekben minden tárgy tanulásánál segíthet a nehézségek leküzdésében. Ennek érdekében az előkészítő évfolyamon a matematika tananyag kiválasztásának legfontosabb célkitűzései:

- Az általános iskolai ismeretek áttekintése, rendszerezése.
- A matematikai és általában a problémamegoldó gondolkodás módszereinek megismerése (pl. logika elemei, általánosítás – analógia, deduktív módszer, indirekt bizonyítás, skatulyaelv).
- A matematikatörténeti vonatkozások kiemelése.
- A matematika szerepének felismertetése az élet különböző területein: játékokban, gazdaságban, művészetekben.

Fontosnak tartjuk, hogy az előkészítő év folyamán ismertessük meg a tanulókat az iskolák könyvtárával, a rendelkezésre álló szakirodalommal, illetve az elektronikus információhordozókkal.

A matematika nagyban segíti a kötelességtudat, a rendszeresség fejlesztését, az önfegyelem kialakítását. A magyar matematikusok teljesítményének, díjainak megismerése fejleszti a nemzeti öntudatot. A közös feladatok megoldása, a csoportmunka fejleszti a társas kapcsolatokat, a munkamegosztás képességét. A matematika jól körülírható követelményei pedig az önértékelést. A tervezési és optimalizációs feladatok segítik a legkevésbé környezetkárosító, a feltételeknek megfelelő legjobb megoldások keresését. A 9. évfolyam igen fontos a pályairányultság kialakulása szempontjából. Az érdeklődést felkeltő témakörök, feladatok nagyban segíthetik a reálpályák felé fordulást. A Sorozatok, százalékszámítás témaköröknek igen fontos szerepe van, segítenek a pénzügyi kompetencia fejlesztésében. Táblázatok, grafikonok elemzése segítheti az információk megértését. A tudományos érdeklődést fejlesztő témakörök pedig az igényes médiaválasztást.

A matematika sajátos tanulási módszereit folyamatosan fejleszteni kell, de a 9. évfolyam sok témaköre (prímszámok, szerkesztések, matematikai játékok) különösen alkalmas az önálló készülés, az önellenőrzés képességének alakítására. A matematika segíti a pontos fogalmazás, a világos indoklás képességét. Ezen az évfolyamon ez már fontos elvárás. Az idegen eredetű szakszavak elemzése, adatok, rövidebb szövegek interneten való keresése kiválóan fejleszti az idegen nyelvi kompetenciát. A megalapozott matematikai ismeretek biztosítják a fenti kompetenciák folyamatos fejlesztését. A matematikai programok alkalmazása kifejezetten alkalmas a digitális kompetenciák fejlesztésére, az algoritmusok használata pedig ezek értő alkalmazását segíti. Az elemzőkészség fejlesztése - pl. játékok kimeneteleinek elemzése, probléma-megoldási stratégiák megismerése - fontos feladat. A matematika



művészetekben való alkalmazása: (szimmetriák, aranymetszés) fejleszti az esztétikai-művészeti tudatosságot és kifejezőképességet.

### Az előkészítő évfolyamon a matematika tantárgy alapóraszámja 144 (heti 4 óra)

<b>Témakörök:</b>	<b>Helyi tanterv óraszámja:</b>
Gondolkodási módszerek, halmazok, logika	14 óra
Algebra	24 óra
Számelmélet	24 óra
Geometria	29 óra
Függvények, sorozatok	15 óra
Kombinatorika, valószínűség	14 óra
Szabadon választható órakeret	12 óra
Ismétlés, számonkérés	12 óra

### **TÉMAKÖR: Gondolkodási módszerek, halmazok, logika**

**ÓRASZÁM:** 14 óra

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK:**

- Halmazokkal kapcsolatos alapfogalmak ismerete, halmazok szemléltetése, halmazműveletek ismerete; számhalmazok ismerete.
- A nyelv logikai elemeinek tudatos szerepeltetése a feladatok megoldása során. Egyszerű állítások igazságtartalmának eldöntése, tagadása.
- Néhány bizonyítási módszer ismerete,
- Matematikai alapú játékok stratégiájának megtalálása, a játék elemzése.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK:**

- Néhány bevezető probléma: A matematikatanulás bevezetéseként az éves anyagból néhány érdekes problémát vetünk fel, amelyek kedvet csinálhatnak a matematikával való foglalkozáshoz. A problémafelvetés időszakában a kérdések nagyobb részét nyitva hagyjuk, és majd az év közben átismételt, vagy új ismeretek segítségével adunk rájuk választ.
- A matematika fogalmi rendszere:
  - Példák definícióra, tételre, axiómára, sejtésre.
- Halmazok:
  - Halmazok megadása, részhalmaz, halmazok uniója, metszete.
  - Elemek halmazokba rendezése több tulajdonság alapján
  - Halmazábra használata.
  - Halmazműveletek elvégzése véges halmazokon.
  - Konkrét alaphalmazokon komplementer halmaz meghatározása.
- Logika elemei:
  - Az „és” a „vagy”, a „ha akkor” és az „akkor és csak akkor” használata.
  - „Bármely” és „Van olyan” használata.
  - Állítások megfogalmazása, elemzése a hétköznapi életből és a matematika területéről.

#### **FOGALMAK:**

Halmaz, számhalmaz, elem, részhalmaz, komplementer halmaz, unió, metszet

### **TÉMAKÖR: Algebra**

**ÓRASZÁM:** 24 óra

**TANULÁSI EREDMÉNYEK:**

- Az egész számok és a racionális számok fogalma, alpműveletek helyes sorrendű elvégzése.
- Algebrai egész kifejezések használata, műveletek algebrai egész kifejezésekkel
- Elsőfokú, egyismeretlenes egyenletek, egyenlőtlenségek megoldási módszerei. Szöveges feladatok – szövegértés, összefüggések lefordítása a matematika nyelvére
- Műveletek egész kitevőjű hatványokkal, azonos alapú hatványok azonosságainak használata feladatmegoldásban.
- Egyenes és fordított arányosság felismerése és alkalmazása matematikai és hétköznapi feladatokban. A mindennapjainkhoz kapcsolódó százalékszámítási feladatok megoldása.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK:**

- Egész számok körében végzett műveletek:
  - Műveletek egész számokkal és kifejezésekkel.
  - Műveleti tulajdonságok.
  - Műveletek azonos alapú hatványokkal.
  - Az első  $n$  egész szám összege és kapcsolódó feladatok, pl. számháromszögek.
  - Speciális szorzatként a faktoriálisokkal való számolás.
- Törtekkel való műveletek:
  - Törtek szorzása, osztása, összeadása, kivonása.
  - Számok normálalakja.
- Mérlegeléssel kapcsolatos feladatok:
  - Pl. 5 súllyal 1 kg-tól hány kg-ig tudunk minden egész kg-ot mérni?
  - Hamis érmék kiválasztása.
- Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldása:
  - Elsőfokú, egy ismeretlenes egyenletek. Mérlegelv.
  - Két ismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerek megoldása.
- Százalékszámítás:
  - Százalékszámítás alapjai.
  - Szöveges feladatok százalékszámításra.
- Szöveges feladatok:
  - Logikai úton, következtetéssel megoldható feladatok.
  - Gyakorlati jellegű példák.

**FOGALMAK:**

Racionális szám, hatvány, alap, kitevő, valós szám, arány, százalék

**TÉMAKÖR: Számelmélet**

**ÓRASZÁM:** 24 óra

**TANULÁSI EREDMÉNYEK:**

- Az oszthatósággal kapcsolatos definíciók ismerete, oszthatósági szabályok alkalmazása, egyszerű oszthatósági problémák vizsgálata.

- Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös alkalmazása.
- Prímszámokkal kapcsolatos tételek, sejtések ismerete.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK:

- Számolás maradékokkal:
  - Maradékokkal végzett műveletek szabályai.
  - Maradékokon alapuló játékok.
  - Négyzetszámok maradékai.
- Oszthatósági szabályok:
  - Oszthatóság az alap hatványainak osztóival.
  - Oszthatóság az alap szomszédjainak osztóival.
  - Oszthatóság a fentiek közül valamelyek szorzatával.
- Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös.
- Számelmélet alaptétele.
- Törzstényező felbontás.
- A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös törzstényező alakja.
- Prímszámokkal kapcsolatos érdekességek:
  - Végtelen sok prím van.
  - Ikerprím-sejtés.
  - Prímek a négyzetszámok szomszédjai között.
  - Prímek a kettő-hatványok szomszédjai között.
  - Fermat-prímek, Mersenne-prímek.
  - Tökéletes számok.
  - Nagy prímekekkel kapcsolatos friss eredmények.
- Matematikatörténet: Eukleidész, Eratoszthenész, Mersenne, Fermat, Euler

#### FOGALMAK:

Osztó, többszörös, prím, prímtényező felbontás, a számelmélet alaptétele, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

#### TÉMAKÖR: Geometria

ÓRASZÁM: 29 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK:

- Geometriai alapfogalmak ismerete, alkalmazása.
- Szögekkel, területekkel kapcsolatos feladatok megoldása.
- Háromszögek szögei és oldalai közötti összefüggések ismerete és alkalmazása.
- Négyszögek belső és külső szögeire vonatkozó összefüggések ismerete.
- Háromszögek nevezetes vonalainak, pontjainak, köreinek ismerete.
- A négyszögek több szempont szerinti összehasonlítása, csoportosítása, tulajdonságainak ismerete.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK:

- Pont, egyenes, sík, félegyenes, szakasz.

- Síkidom, sokszög, átlók száma, konvexitás.
- Tételek kölcsönös helyzete.
- Ponthalmazok távolsága:
  - Két pont, pont és egyenes, pont és sík távolsága.
  - Két egyenes távolsága, két sík távolsága.
- Alapszerkesztések.
- Matematikatörténet: Eukleidész: Elemek
- A szög, szögek fajtái.
- Szögpárok:
  - csúcsszögek, mellékszögek, pótszögek,
  - párhuzamos szárú szögek, merőleges szárú szögek.
- Sokszögek szögösszege.
- Nevezetes háromszögek:
  - $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ -os,
  - $15^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$ -os szögekkel rendelkező háromszögek.
- Területekre vonatkozó tételek, feladatok.
- Távolsággal jellemzett ponthalmazok:
  - adott térelemtől adott távolságra lévő pontok halmaza síkban és térben,
  - két térelemtől egyenlő távol lévő pontok halmaza síkban és térben.
- Háromszögek, négyszögek:
  - Háromszögek nevezetes vonalai és körei.
  - Négyszögek osztályozása.
- Néhány geometriai alapú játék.
- Matematikatörténet: Klasszikus geometriai problémák: a körosztás, a kockakettőzés, a szögharmadolás, a kör négyszögesítésének kérdése.

**FOGALMAK:**

Pont, egyenes, szakasz, félegyenes, sík, síkidom, sokszög, test, csúcs, él, lap, merőleges, párhuzamos, szög, kör, gömb

**TÉMAKÖR: Függvények**

**ÓRASZÁM:** 15 óra

**TANULÁSI EREDMÉNYEK:**

- A függvény megadása, a szereplő halmazok ismerete (értelmezési tartomány, értékészlet); valós függvény alaptulajdonságainak ismerete.
- A lineáris függvény, a másodfokú függvény, a fordított arányosság függvényének ismerete (tulajdonságok, grafikon).
- Egylépéses függvény-transzformációk végrehajtása.

- A számtani és mértani sorozat felismerése, a sorozatra vonatkozó összefüggések használata feladatmegoldás során.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK:

- A függvény fogalma.
- Függvénytulajdonságok:
  - Értelmezési tartomány, értékészlet, zérushely.
  - Monotonitás, szélsőérték.
- Az egyenes arányosság és grafikonja.
- Lineáris függvény: Elsőfokú függvény, konstans függvény.
- Modellek alkotása: lineáris kapcsolatok felfedeztetése.
- Fordított arányosság:  $f(x) = \frac{a}{x}$
- Másodfokú függvény.
- Függvény-transzformációk:
  - Egyszerű esetekben:  $f(x)+c$ ;  $f(x+c)$ ,  $-f(x)$ .
- Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása.
- Matematikatörténet: René Descartes
- A sorozat, mint függvény; Sorozatok készítése, vizsgálata.
  - A számtani sorozat:
    - A számtani sorozat megadása az első taggal és a differenciával.
    - A számtani sorozat első  $n$  tagjának összege.
    - A számtani közép.
  - A mértani sorozat:
    - A mértani sorozat megadása az első taggal és a hányadossal.
    - Kamatos kamat, mint mértani sorozat. (csak alapeladatok)
    - A mértani közép két változóra.
- Matematikatörténet: Gauss

#### FOGALMAK:

- Függvény, értelmezési tartomány, értékészlet, zérushely, szélsőérték, egyenes arányosság, fordított arányosság, sorozat, számtani sorozat, számtani közép, mértani sorozat, mértani közép

#### TÉMAKÖR: Kombinatorika, valószínűség

**ÓRASZÁM:** 14 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK:

- Egyszerű leszámítási feladatok megoldása, a megoldás gondolatmenetének rögzítése szóban, írásban.
- A véletlen jelenségek tudatos megfigyelése, tapasztalatok levonása, ezek alapján a valószínűségi szemlélet fejlődése.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK:

- Kombinatorika:
  - Sorbarendezési feladatok.
  - A faktoriális jelölés használata.
  - Kiválasztási feladatok: „általános iskolás” módszerrel, képletek nélkül, vagy kevés képlettel.
  - Körmérkőzések feladatok.
  - Kombinatorikus geometriai feladatok: Pl. Hány részre osztja a síkot  $n$  egyenes?

Melyik valószínűbb?

- A valószínűség számítás témakörnek itt csak az előkészítése történik. Itt még legtöbbször nem azt a kérdést vetjük fel, hogy egy eseménynek mennyi a valószínűsége, csak olyan kérdéseket vizsgálunk, amelyben azt kell eldönteni, hogy két esemény közül melyik a valószínűbb.

#### **FOGALMAK:**

- Faktoriális, rendezett halmaz. Gyakoriság, relatív gyakoriság.

#### **TÉMAKÖR: Szabadon választható órakeret**

**ÓRASZÁM:** 12 óra

#### **TARTALOM:**

Azt a célt szolgálja, hogy minél pozitívabb hozzáállás alakuljon ki a matematikához, a problémamegoldáshoz. Ha egy témakört az adott óraszámban még nem sajátították el a tanulók az elvárt szinten, akkor lehet rá egy-két órával többet fordítani.